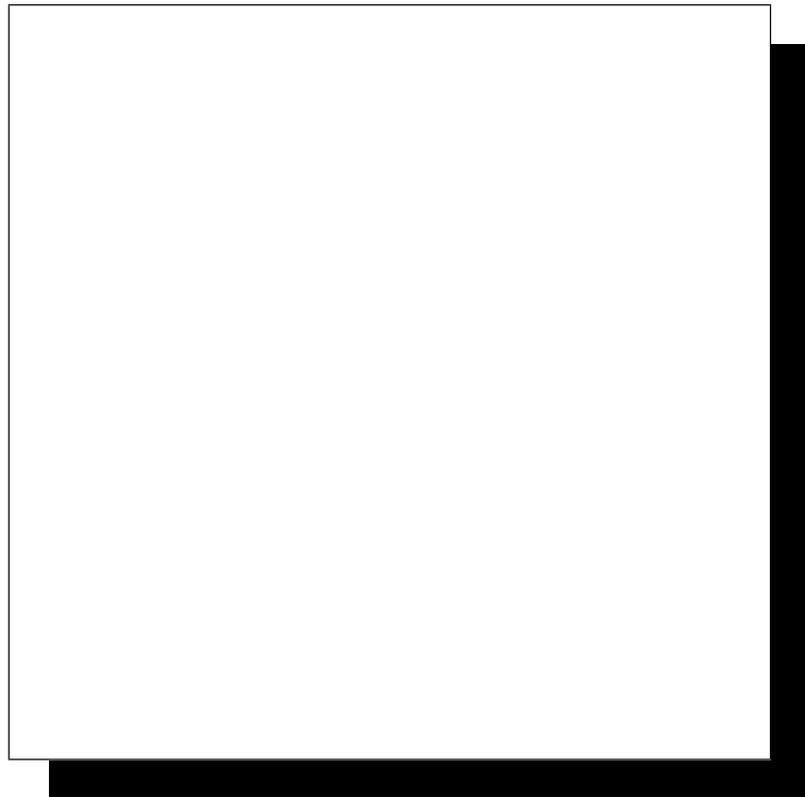


Randwertprobleme für den de Rham Komplex

Diplomarbeit

von

Wolfgang Strößner



eingereicht

beim Institut für Mathematik
der Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Augsburg

September 1994

Erstgutachter: Prof. Dr. Jochen Brüning

Zweitgutachter: Priv. Doz. Dr. Matthias Lesch

Bestätigung

Hiermit erkläre ich, daß diese Diplomarbeit selbständig und unter ausschließlicher Verwendung der angegebenen Hilfsmittel erstellt wurde. Ich habe sie weder als Doktor-, Magister- oder Diplomarbeit bei einer anderen Universität oder Hochschule eingereicht.

Augsburg, den 12. September 1994

(Wolfgang Strößner)

Inhalt

Einleitung	6
1 Grundlagen	9
1.1 Hilbertkomplexe	9
1.2 Aussagen über Involutionen	17
1.3 Sobolevräume	22
2 Differentialformen und $\bar{\partial}$-operatoren	30
2.1 Spezielle Differentialoperatoren	30
2.2 Die äußere Ableitung auf Sobolevräumen	54
2.3 Der Spursatz von Paquet	61
2.4 Harmonische Formen	88
2.5 Randwertprobleme	94
3 Anwendungen	111
3.1 Divergenz und Rotation	111
3.2 Die Maxwellgleichungen	114
3.3 Ein Beispiel aus der Strömungsmechanik	123
4 Schlußbemerkung	127
Literatur	128
Symbolverzeichnis	130
Stichwortverzeichnis	135

Einleitung

Sei M eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand. Auf M sei eine Differentialform η und auf ∂M eine Differentialform χ gegeben. Es stellt sich nun die Frage, ob es eine Differentialform ω auf M gibt, so daß die äußere Ableitung von ω gleich η und die Einschränkung von ω auf ∂M gleich χ ist. Im Falle der Existenz eines solchen ω ist es interessant, danach zu fragen, ob dieses ω eindeutig ist, und welche Eigenschaften es besitzt.

Es muß insbesondere untersucht werden, unter welchen Voraussetzungen diese Fragestellung überhaupt sinnvoll ist. Für C^∞ -Formen treten keine Probleme auf. Falls ω aber etwa eine L^2 -Form ist, kann unter Umständen die äußere Ableitung von ω nicht mehr sinnvoll definiert werden, und auch eine Einschränkung von ω auf den Rand ist nicht möglich, da ∂M eine L^2 -Nullmenge bezüglich M ist.

Es stellt sich nun aber heraus, daß auf dem Definitionsbereich der maximalen abgeschlossenen Fortsetzung bezüglich L^2 der äußeren Ableitung ein Einschränkungoperator von Differentialformen über M auf Differentialformen über ∂M definiert werden kann. Damit kann das obige Problem auf einer sehr großen Klasse von Differentialformen formuliert werden.

Ausgehend vom glatten Fall — das heißt, daß alle auftretenden Differentialformen als C^∞ angenommen werden — ergeben sich in der allgemeinen Formulierung des obigen Problems etliche Schwierigkeiten, die hauptsächlich darauf beruhen, daß es keineswegs offensichtlich ist, ob Eigenschaften der äußeren Ableitung (zum Beispiel die Vertauschbarkeit mit der Einschränkung einer Differentialform auf den Rand von M) für ihre abgeschlossenen Fortsetzungen weiterhin gelten, und daß bei Betrachtungen

von Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten mit Rand gewisse Instrumente der Analysis (etwa die Regularität eines elliptischen Differentialoperators) am Rand nicht angewandt werden können.

In Kapitel 1 werden zum weiteren Verständnis notwendige Begriffe wie Hilbertkomplexe und Sobolevräume auf Mannigfaltigkeiten eingeführt und einige grundlegende Sätze und Lemmata bewiesen.

Kapitel 2 stellt den Kern dieser Arbeit dar. Hier werden die relevanten Operatoren — unter anderem die äußere Ableitung in größtmöglicher Allgemeinheit und der oben erwähnte Einschränkungoperator — eingeführt und wichtige Eigenschaften davon hergeleitet. Anschließend wird die Lösbarkeit des oben erwähnten und einiger dazu verwandter Randwertprobleme diskutiert.

In Kapitel 3 werden Anwendungen der Ergebnisse aus Kapitel 2 vorgestellt. Solche Anwendungen lassen sich unter anderem in der Elektrodynamik und der Strömungsmechanik finden.

Die verwendete Notation entspricht weitgehend der üblichen Notation der globalen Analysis bzw. der Funktionalanalysis. Es war aber leider nicht immer möglich, auf einen *Standard* zurückzugreifen.

Es ist nicht möglich, alle zum Verständnis dieser Arbeit notwendigen Voraussetzungen in die Arbeit selbst aufzunehmen. Ich habe mich aber bemüht, Begriffe und Ergebnisse, die in der globalen Analysis oder der Funktionalanalysis nicht als allgemein bekannt vorausgesetzt werden können einzuführen. Darüber hinaus können die Bücher von BOTT / TU [2] und WARNER [15] als grundlegende Einführung in die Analysis auf Mannigfaltigkeiten und den Differentialformenkalkül herangezogen werden. Ein wesentlich tiefgreifenderes Werk ist das Buch von GILKEY [8], in dem insbesondere im ersten Kapitel grundlegende Resultate über Mannigfaltigkeiten und Operatoren über Mannigfaltigkeiten dargestellt werden. Die Grundlagen der Funktionalanalysis sind in REED / SIMON [12] und in YOSIDA [16] nachzulesen. Eine detaillierte Untersuchung von Hilbertkomplexen findet man in dem Aufsatz von BRÜNING / LESCH [4]. Viele Aussagen aus den genannten Arbeiten werden auch in dieser Arbeit zitiert. In der Arbeit von SCHWARZ [13] werden ähnliche Randwertprobleme betrachtet wie in der vorliegenden Arbeit, allerdings werden dort etwas andere Rahmenbedin-

gungen zugrunde gelegt. Insbesondere wählt SCHWARZ [13] die Räume, in denen Lösungen zu suchen sind spezieller, als das in dieser Arbeit getan wird.

In dieser Arbeit ist unter einem Banach- oder einem Hilbertraum grundsätzlich ein komplexer Vektorraum zu verstehen. Auch bei Tangential- und Kotangentialbündel einer Mannigfaltigkeit sind generell die komplexifizierten Bündel gemeint. Als Dimension eines komplexen Vektorraums wird die Dimension über \mathbb{C} betrachtet. Ausdrücke wie $C^\infty(M)$ bezeichnen komplexwertige Funktionen. Auftretende Mannigfaltigkeiten sind dagegen grundsätzlich reelle Mannigfaltigkeiten, deren Dimension sich auf \mathbb{R} bezieht. Die äußere Ableitung auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit bezieht sich auf komplexwertige Differentialformen.

Danksagungen

Besonders bedanken möchte ich mich bei Prof. Dr. Jochen Brüning für die Betreuung dieser Arbeit. Von Priv. Doz. Dr. Matthias Lesch und Dr. Norbert Peyerimhoff habe ich in häufigen Gesprächen viele hilfreiche Hinweise erhalten. Auch dafür möchte ich meinen Dank aussprechen. Außerdem danke ich Dipl.-Math. Karlheinz Erdinger, Michael Gruber und Ulrich Strößner, mit denen ich etliche anregende Diskussionen geführt habe.

1 Grundlagen

In diesem Kapitel sollen einige wesentliche Definitionen eingeführt und grundlegende Ergebnisse vorgestellt werden, die zum Verständnis dieser Arbeit notwendig sind, aber nicht als allgemein bekannt vorausgesetzt werden können.

Im weiteren werden wir ein paar eigene Ergebnisse beweisen, die in späteren Kapiteln benötigt werden.

1.1 Hilbertkomplexe

Eine tiefgreifende Untersuchung von Hilbertkomplexen ist in BRÜNING / LESCH [4] zu finden. Wir werden hier nur einige wichtige Ergebnisse vorstellen. Manche Definitionen und Sätze lassen sich auch noch verallgemeinern, so zum Beispiel die Definition einer Sequenz (Definition 1.1.10) oder Theorem 1.1.11. Wir betrachten aber jeweils nur den für diese Arbeit relevanten Spezialfall.

1.1.1 Definition: Seien X und Y Hilberträume. Dann bezeichnet $\mathcal{C}(X, Y)$ die Menge aller abgeschlossenen linearen Operatoren mit in X dichtliegendem Definitionsbereich und mit Bild in Y .

1.1.2 Definition: Wir betrachten für $0 \leq k \leq n$ Hilberträume H_k und setzen

$$H_{n+1} := \{0\}. \tag{1.1.1}$$

Für jedes k sei

$$D_k \in \mathcal{C}(H_k, H_{k+1}) \quad (1.1.2)$$

ein abgeschlossener Operator. Der Definitionsbereich von D_k wird mit \mathcal{D}_k bezeichnet. Wir setzen

$$D := \bigoplus_k D_k \quad \text{und} \quad \mathcal{D} := \bigoplus_k \mathcal{D}_k. \quad (1.1.3)$$

Falls

$$\text{im } D_k \subset \mathcal{D}_{k+1} \quad (1.1.4)$$

und

$$D_{k+1} \circ D_k = 0 \quad (1.1.5)$$

für alle k gilt, dann heißt der Komplex

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_0 \xrightarrow{D_0} \mathcal{D}_1 \xrightarrow{D_1} \dots \xrightarrow{D_{n-1}} \mathcal{D}_n \longrightarrow 0 \quad (1.1.6)$$

ein **Hilbertkomplex**. Er wird mit (\mathcal{D}, D) bezeichnet.

1.1.3 Definition: Sei (\mathcal{D}, D) ein Hilbertkomplex. Wir definieren

$$D^* := \bigoplus_k D_k^* \quad \text{und} \quad \mathcal{D}^* := \bigoplus_k \mathcal{D}_k^*. \quad (1.1.7)$$

Durch

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_n \xrightarrow{D_{n-1}^*} \mathcal{D}_{n-1} \xrightarrow{D_{n-2}^*} \dots \xrightarrow{D_0^*} \mathcal{D}_0 \longrightarrow 0 \quad (1.1.8)$$

wird sicherlich wieder ein Hilbertkomplex definiert. Er heißt der zu (\mathcal{D}, D) **duale Komplex** und wird mit (\mathcal{D}^*, D^*) bezeichnet.

1.1.4 Definition: Sei (\mathcal{D}, D) ein Hilbertkomplex. (\mathcal{D}, D) heißt **Fredholmkomplex**, falls die Homologie des Komplexes endlich ist, das heißt, falls die Räume

$$\mathcal{H}_k := \ker D_k / \text{im } D_{k-1} \quad (1.1.9)$$

alle endlichdimensional sind.

1.1.5 Definition: Sei (\mathcal{D}, D) ein Hilbertkomplex. Der **Laplaceoperator** der Stufe k bezüglich (\mathcal{D}, D) wird durch

$$\Delta_k := D_k^* D_k + D_{k-1} D_{k-1}^* \quad (1.1.10)$$

definiert. Wir setzen

$$\Delta := \bigoplus_k \Delta_k. \quad (1.1.11)$$

Aus

$$\Delta = (D + D^*)^2 \quad (1.1.12)$$

folgt, daß der Laplaceoperator nichtnegativ ist, weil

$$D + D^* \quad (1.1.13)$$

sicherlich selbstadjungiert ist.

1.1.6 Lemma: Sei (\mathcal{D}, D) ein Hilbertkomplex mit zugehörigem Laplaceoperator Δ . Dann gilt

$$\ker(D + D^*) = \ker \Delta \quad (1.1.14)$$

und

$$\ker D_k \cap \ker D_{k-1}^* = \ker \Delta_k. \quad (1.1.15)$$

Beweis: Die Inklusion

$$\ker(D + D^*) \subset \ker \Delta \quad (1.1.16)$$

ist offensichtlich, da

$$\Delta = (D + D^*)^2 \quad (1.1.17)$$

gilt. Sei nun $\omega \in \ker \Delta$ gegeben. Da $D + D^*$ selbstadjungiert ist, gilt

$$0 = (\Delta \omega \mid \omega) = ((D + D^*) \omega \mid (D + D^*) \omega) = \|(D + D^*) \omega\|^2. \quad (1.1.18)$$

Daraus folgt $\omega \in \ker(D + D^*)$.

Es gilt sicherlich

$$\ker D_k \cap \ker D_{k-1}^* \subset \ker \Delta_k. \quad (1.1.19)$$

Für

$$\omega \in \ker \Delta_k = \ker (D_k + D_{k-1}^*) \quad (1.1.20)$$

gilt

$$D_k \omega \in H_{k+1} \quad \text{und} \quad D_{k-1}^* \omega \in H_{k-1}. \quad (1.1.21)$$

Falls also

$$(D_k + D_{k-1}^*) \omega = 0 \quad (1.1.22)$$

gilt, muß auch

$$D_k \omega = D_{k-1}^* \omega = 0 \quad (1.1.23)$$

gelten. Daraus folgt die zweite Behauptung. ■

1.1.7 Definition: Wir definieren die Menge der *harmonischen Formen* der Stufe k bezüglich eines Hilbertkomplexes (\mathcal{D}, D) durch

$$\widehat{\mathcal{H}}_k := \ker D_k \cap \ker D_{k-1}^* = \ker \Delta_k \quad (1.1.24)$$

und setzen

$$\widehat{\mathcal{H}} := \bigoplus_k \widehat{\mathcal{H}}_k. \quad (1.1.25)$$

1.1.8 Satz: (nach BRÜNING/LESCH [4], Lemma 2.1 und Theorem 2.4) Sei (\mathcal{D}, D) ein Hilbertkomplex. Dann gibt es für jedes k eine eindeutige orthogonale Zerlegung

$$H_k = \widehat{\mathcal{H}}_k \oplus \overline{\operatorname{im} D_{k-1}} \oplus \overline{\operatorname{im} D_k^*}, \quad (1.1.26)$$

die sogenannte **Hodgezerlegung**.

Falls (\mathcal{D}, D) ein Fredholmkomplex ist, vereinfacht sich die Hodgezerlegung zu

$$H_k = \widehat{\mathcal{H}}_k \oplus \operatorname{im} D_{k-1} \oplus \operatorname{im} D_k^* \quad (1.1.27)$$

und es gilt

$$\mathcal{H}_k \simeq \widehat{\mathcal{H}}_k. \quad (1.1.28)$$

Beweis: Für Hilberträume X und Y und $T \in \mathcal{C}(X, Y)$ gilt

$$(\ker T)^\perp = \overline{\operatorname{im} T^*}. \quad (1.1.29)$$

Da alle Operatoren D_k abgeschlossen sind, ist auch

$$\ker D_k \subset H_k \quad (1.1.30)$$

abgeschlossen. Außerdem ist D_{k-1}^* abgeschlossen, woraus folgt, daß

$$\ker D_{k-1}^* \subset H_k \quad (1.1.31)$$

abgeschlossen ist. Demnach gilt

$$\begin{aligned} H_k &= (\ker D_k)^\perp \oplus \ker D_k = \\ &= (\ker D_k)^\perp \oplus \overline{\operatorname{im} D_{k-1}} \oplus \left(\ker D_k \cap (\operatorname{im} D_{k-1})^\perp \right) = \\ &= \overline{\operatorname{im} D_k^*} \oplus \overline{\operatorname{im} D_{k-1}} \oplus \left(\ker D_k \cap \ker D_{k-1}^* \right). \end{aligned} \quad (1.1.32)$$

Da

$$\widehat{\mathcal{H}}_k = \ker D_k \cap \ker D_{k-1}^* \quad (1.1.33)$$

gilt, folgt die erste Behauptung.

Falls nun (\mathcal{D}, D) ein Fredholmkomplex ist, gilt für alle k nach Definition

$$\dim \mathcal{H}_k < \infty, \quad (1.1.34)$$

also ist \mathcal{H}_k abgeschlossen. Folglich ist

$$\operatorname{im} D_k \subset \ker D_{k+1} \quad (1.1.35)$$

abgeschlossen, wie in YOSIDA [16], S. 60 gezeigt wird, weil

$$\operatorname{im} D_k \simeq \ker D_{k+1} / \mathcal{H}_{k+1} \quad (1.1.36)$$

gilt. Demnach muß auch

$$\operatorname{im} D_k \subset H_{k+1} \quad (1.1.37)$$

abgeschlossen sein, da

$$\ker D_{k+1} \subset H_{k+1} \quad (1.1.38)$$

abgeschlossen ist. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Bild (vgl. YOSIDA [16], S. 205) ist dann

$$\operatorname{im} D_k^* \subset H_k \quad (1.1.39)$$

abgeschlossen. Damit folgt

$$H_k = \widehat{\mathcal{H}}_k \oplus \operatorname{im} D_{k-1} \oplus \operatorname{im} D_k^*. \quad (1.1.40)$$

Die letzte Behauptung folgt sofort aus der Bemerkung, daß

$$\ker D_k = \widehat{\mathcal{H}}_k \oplus \operatorname{im} D_{k-1} \quad (1.1.41)$$

gilt. Damit erhält man nämlich

$$\dim \mathcal{H}_k = \dim \widehat{\mathcal{H}}_k < \infty. \quad (1.1.42)$$

■

1.1.9 Definition: Seien

$$A = (\mathcal{D}_A, D_A) \quad (1.1.43)$$

und

$$B = (\mathcal{D}_B, D_B) \quad (1.1.44)$$

zwei Hilbertkomplexe und

$$f = \bigoplus_k f_k \quad (1.1.45)$$

ein linearer Operator mit

$$f_k \in \operatorname{Hom}(\mathcal{D}_{A,k}, \mathcal{D}_{B,k}). \quad (1.1.46)$$

Man nennt f eine **Komplexabbildung**, falls

$$f \circ D_A = D_B \circ f \quad (1.1.47)$$

gilt.

1.1.10 Definition: Für $k \in \mathbb{Z}$ seien K_k Hilbertkomplexe und

$$f_k : K_k \rightarrow K_{k+1} \quad (1.1.48)$$

Komplexabbildungen. Falls für jedes $k \in \mathbb{Z}$ nun

$$f_{k+1} \circ f_k = 0 \quad (1.1.49)$$

gilt, dann heißt

$$\dots \longrightarrow K_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} K_k \xrightarrow{f_k} K_{k+1} \xrightarrow{f_{k+1}} K_{k+2} \longrightarrow \dots \quad (1.1.50)$$

eine **Sequenz** oder auch eine **lange Sequenz**. Falls darüber hinaus für jedes $k \in \mathbb{Z}$

$$\operatorname{im} f_k = \ker f_{k+1} \quad (1.1.51)$$

gilt, spricht man von einer **exakten Sequenz**.

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C \longrightarrow 0 \quad (1.1.52)$$

mit Hilbertkomplexen A , B und C und Komplexabbildungen

$$g : A \rightarrow B \quad \text{und} \quad h : B \rightarrow C \quad (1.1.53)$$

heißt **kurze Sequenz**, falls

$$h \circ g = 0 \quad (1.1.54)$$

gilt. Wenn

$$\operatorname{im} g = \ker h \quad (1.1.55)$$

gilt, g injektiv und h surjektiv ist, nennt man die Sequenz **exakt**.

Bemerkung: Die Definitionen 1.1.9 und 1.1.10 können wörtlich auf Komplexe übertragen werden, die keine Hilbertkomplexe sind. Allerdings werden wir die Begriffe *Komplexabbildung* und *Sequenz* nur im Zusammenhang mit Hilbertkomplexen benutzen.

Das folgende Theorem ist ein wohlbekanntes Resultat aus der homologischen Algebra. Es wird etwa in MACLANE [10] in etwas größerer Allgemeinheit in Theorem 2.4.1 bewiesen.

1.1.11 Theorem: Seien

$$A = (\mathcal{D}_A, D_A), \quad (1.1.56)$$

$$B = (\mathcal{D}_B, D_B) \quad (1.1.57)$$

und

$$C = (\mathcal{D}_C, D_C) \quad (1.1.58)$$

Hilbertkomplexe und

$$f : A \rightarrow B \quad \text{und} \quad g : B \rightarrow C \quad (1.1.59)$$

Komplexabbildungen. Falls

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0 \quad (1.1.60)$$

eine kurze exakte Sequenz darstellt, dann wird dadurch eine lange exakte Sequenz

$$\dots \longrightarrow \mathcal{H}_{C,k-1} \xrightarrow{\kappa_{*,k-1}} \mathcal{H}_{A,k} \xrightarrow{f_{*,k}} \mathcal{H}_{B,k} \xrightarrow{g_{*,k}} \mathcal{H}_{C,k} \xrightarrow{\kappa_{*,k}} \mathcal{H}_{A,k+1} \longrightarrow \dots \quad (1.1.61)$$

induziert. Dabei werden f_* , g_* und κ_* durch

$$f_* [\omega]_A := [f(\omega)]_B, \quad (1.1.62)$$

$$g_* [\omega]_B := [g(\omega)]_C \quad (1.1.63)$$

und

$$\kappa_* [\omega]_C := [f^{-1} \circ D_B \circ g^{-1}(\omega)]_A \quad (1.1.64)$$

definiert. $[\omega]_A$, $[\omega]_B$ und $[\omega]_C$ bezeichnen jeweils die Äquivalenzklasse von ω in \mathcal{H}_A , \mathcal{H}_B bzw. \mathcal{H}_C . f_* , g_* und κ_* sind wohldefiniert. Das bedeutet insbesondere für κ_* , daß für $\omega \in \ker D_C$ alle Elemente der Menge

$$\{f^{-1} \circ D_B \circ g^{-1}(\vartheta) \mid \vartheta \in \ker D_C, [\vartheta]_C = [\omega]_C\} \subset \ker D_A \quad (1.1.65)$$

in einer einzigen Äquivalenzklasse von \mathcal{H}_A liegen.

1.1.12 Korollar: Falls A , B und C Fredholmkomplexe sind, dann wird unter den Voraussetzungen von Theorem 1.1.11 eine lange exakte Sequenz

$$\dots \longrightarrow \widehat{\mathcal{H}}_{C,k-1} \xrightarrow{\widehat{\kappa}_{*,k-1}} \widehat{\mathcal{H}}_{A,k} \xrightarrow{\widehat{f}_{*,k}} \widehat{\mathcal{H}}_{B,k} \xrightarrow{\widehat{g}_{*,k}} \widehat{\mathcal{H}}_{C,k} \xrightarrow{\widehat{\kappa}_{*,k}} \widehat{\mathcal{H}}_{A,k+1} \longrightarrow \dots \quad (1.1.66)$$

induziert.

Beweis: Dies ist eine direkte Folgerung aus Theorem 1.1.11 unter Beachtung von Formel (1.1.28). ■

1.2 Aussagen über Involutionen

In diesem Abschnitt sollen einige Aussagen über elementare Eigenschaften von involutiven Abbildungen hergeleitet werden, die später insbesondere auf die in Abschnitt 2.1 definierte Funktion α bzw. deren Pullback angewandt werden sollen.

1.2.1 Lemma: Sei H ein Hilbertraum und

$$T : H \rightarrow H \tag{1.2.1}$$

ein involutiver linearer Operator. Dann gilt

$$H = H^+ \oplus H^-, \tag{1.2.2}$$

wobei H^+ und H^- die zu $+1$ bzw. -1 gehörigen Eigenräume von T sind.

Beweis: Sei $x \in H$ gegeben. Mit

$$x^+ := \frac{1}{2}(x + Tx) \tag{1.2.3}$$

und

$$x^- := \frac{1}{2}(x - Tx) \tag{1.2.4}$$

gilt

$$x = x^+ + x^- \tag{1.2.5}$$

und $x^+ \in H^+$, $x^- \in H^-$, da T involutiv ist. ■

1.2.2 Lemma: Falls unter den Voraussetzungen von Lemma 1.2.1 T zusätzlich eine Isometrie ist, gilt

$$H^+ \perp H^-. \tag{1.2.6}$$

Beweis: Für $x \in H^+$ und $y \in H^-$ gilt

$$(x | y) = (Tx | Ty) = -(x | y). \quad (1.2.7)$$

Daraus folgt

$$(x | y) = 0. \quad (1.2.8)$$

■

1.2.3 Lemma: Sei H ein Hilbertraum und

$$T : H \rightarrow H \quad (1.2.9)$$

ein involutiver linearer Operator mit

$$\|T\| \leq 1. \quad (1.2.10)$$

Dann ist T eine selbstadjungierte Isometrie.

Beweis: Aus Lemma 1.2.1 folgt, daß H in die Eigenräume H^+ und H^- zu $+1$ und -1 von T zerfällt. Da

$$\|T\| \leq 1 \quad (1.2.11)$$

ist, folgt für $x \in H$

$$\|x\| = \|T^2x\| \leq \|T\| \|Tx\| \leq \|Tx\| \leq \|T\| \|x\| \leq \|x\|. \quad (1.2.12)$$

Folglich muß überall Gleichheit gelten, und T ist somit eine Isometrie. Wegen

$$T^2 = 1 \quad (1.2.13)$$

erhalten wir für $x, y \in H$

$$(x | T^*y) = (Tx | y) = (T^2x | Ty) = (x | Ty), \quad (1.2.14)$$

also

$$T = T^*. \quad (1.2.15)$$

Demnach ist T selbstadjungiert.

■

1.2.4 Definition: Seien M_1 und M_2 kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeiten (eventuell mit Rand). Eine Abbildung

$$f \in C^\infty(M_1, M_2) \quad (1.2.16)$$

induziert einen Pullback

$$f^* : C^\infty(\wedge T^* M_2) \rightarrow C^\infty(\wedge T^* M_1). \quad (1.2.17)$$

f^* ist ein linearer Operator. Falls f^* bezüglich

$$L^2(\wedge T^* M_2) \quad \text{und} \quad L^2(\wedge T^* M_1) \quad (1.2.18)$$

stetig ist, kann f^* durch Stetigkeit zu

$$f^* : L^2(\wedge T^* M_2) \rightarrow L^2(\wedge T^* M_1) \quad (1.2.19)$$

fortgesetzt werden. Diese Fortsetzung wird auch **Pullback** genannt. Falls explizit die Abbildung

$$f^* : C^\infty(\wedge T^* M_2) \rightarrow C^\infty(\wedge T^* M_1) \quad (1.2.20)$$

gemeint ist, werden wir vom **glatten Pullback** sprechen.

Bemerkung: Sei M eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit (mit oder ohne Rand). Auf $L^2(\wedge^k T^* M)$ wird als kanonisches Skalarprodukt

$$(\omega \mid \eta)_{L^2} = \int_M \omega \wedge \star \bar{\eta} \quad (1.2.21)$$

betrachtet. Für $\omega \in L^2(\wedge^k T^* M)$ und $\eta \in L^2(\wedge^l T^* M)$ mit $k \neq l$ wird

$$(\omega \mid \eta)_{L^2} = 0 \quad (1.2.22)$$

gesetzt. Damit ist ein Skalarprodukt auf $L^2(\wedge T^* M)$ erklärt.

1.2.5 Lemma: Sei M eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit (mit oder ohne Rand) der Dimension m . Dann ist der Hodgeoperator

$$\star : L^2(\wedge T^* M) \rightarrow L^2(\wedge T^* M) \quad (1.2.23)$$

eine Isometrie.

Beweis: Für $\omega, \eta \in \Omega_0^k(\overset{\circ}{M})$ gilt

$$\begin{aligned}
(\star\omega \mid \star\eta)_{L^2} &= \int_M \star\omega \wedge \star\star\bar{\eta} = \\
&= (-1)^{k(m-k)} \int_M \star\omega \wedge \bar{\eta} = \\
&= \int_M \bar{\eta} \wedge \star\omega = \\
&= (\bar{\eta} \mid \bar{\omega})_{L^2} = (\omega \mid \eta)_{L^2}.
\end{aligned} \tag{1.2.24}$$

Für $\omega \in \Omega_0^k(\overset{\circ}{M})$ und $\eta \in \Omega_0^l(\overset{\circ}{M})$ mit $k \neq l$ gilt

$$0 = (\omega \mid \eta)_{L^2} = (\star\omega \mid \star\eta)_{L^2}. \tag{1.2.25}$$

Da

$$\Omega_0(\overset{\circ}{M}) \subset L^2(\wedge T^*M) \tag{1.2.26}$$

dicht liegt, ist die Aussage bewiesen. ■

1.2.6 Satz: Sei M eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit (mit oder ohne Rand) der Dimension m und

$$f \in C^\infty(M, M) \tag{1.2.27}$$

eine orientierungserhaltende Involution, deren glatter Pullback stetig ist. Falls f^* selbstadjungiert ist, kommutiert der Pullback

$$f^* : L^2(\wedge T^*M) \rightarrow L^2(\wedge T^*M) \tag{1.2.28}$$

mit dem Hodgeoperator auf M .

Beweis: Da f eine Involution ist, gilt dies auch für f^* . Seien $\omega \in$

$C^\infty(\wedge^k T^* M)$ und $\eta \in C^\infty(\wedge^{m-k} T^* M)$ gegeben. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
(\star f^* \omega \mid \eta)_{L^2} &= (-1)^{k(m-k)} (f^* \omega \mid \star \eta)_{L^2} = \\
&= \int_M f^* \omega \wedge \bar{\eta} = \\
&= \int_M f^* (\omega \wedge f^* \bar{\eta}) = \\
&= \int_{f(M)=M} \omega \wedge f^* \bar{\eta} = \tag{1.2.29} \\
&= (-1)^{k(m-k)} \int_M \omega \wedge \star \star f^* \bar{\eta} = \\
&= (-1)^{k(m-k)} (\omega \mid \star f^* \eta)_{L^2} = \\
&= (\star \omega \mid f^* \eta)_{L^2} = (f^* \star \omega \mid \eta)_{L^2}.
\end{aligned}$$

Da

$$C^\infty(\wedge T^* M) \subset L^2(\wedge T^* M) \tag{1.2.30}$$

dicht liegt, gilt

$$\star f^* = f^* \star. \tag{1.2.31}$$

■

1.2.7 Satz: Sei M eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit (mit oder ohne Rand) der Dimension m und

$$f \in C^\infty(M, M) \tag{1.2.32}$$

eine orientierungsumkehrende Involution, deren glatter Pullback stetig ist. Falls f^* selbstadjungiert ist, antikommutiert der Pullback

$$f^* : L^2(\wedge T^* M) \rightarrow L^2(\wedge T^* M) \tag{1.2.33}$$

mit dem Hodgeoperator auf M .

Beweis: Seien $\omega \in C^\infty(\wedge^k T^* M)$ und $\eta \in C^\infty(\wedge^{m-k} T^* M)$ gegeben. Dann gilt analog zum Beweis von Satz 1.2.6

$$\begin{aligned}
(\star f^* \omega \mid \eta)_{L^2} &= \int_M f^* (\omega \wedge f^* \bar{\eta}) = \\
&= - \int_{f(M)=M} \omega \wedge f^* \bar{\eta} = - (f^* \star \omega \mid \eta)_{L^2}.
\end{aligned} \tag{1.2.34}$$

Da

$$C^\infty(\wedge T^*M) \subset L^2(\wedge T^*M) \quad (1.2.35)$$

dicht liegt, gilt

$$\star f^* = -f^* \star. \quad (1.2.36)$$

■

1.2.8 Korollar: Sei M eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit (mit oder ohne Rand). Falls

$$f \in C^\infty(M, M) \quad (1.2.37)$$

eine Involution und f^* isometrisch ist, dann ist f^* selbstadjungiert.

Beweis: Falls f involutiv ist, ist f^* sicherlich eine involutive Isometrie. Dann folgt die Aussage mit Lemma 1.2.3.

■

1.3 Sobolevräume

In diesem Abschnitt sollen Sobolevräume über geschlossenen orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeiten eingeführt werden. Wir wollen hier keine vollständige Theorie der Sobolevräume herleiten. Vielmehr soll — ausgehend von Sobolevräumen über \mathbb{R}^n — ein kurzer Überblick über Sobolevräume über Mannigfaltigkeiten gegeben werden. Wir beschränken uns auf die Ergebnisse, die zum weiteren Verständnis dieser Arbeit nötig sind. Dabei orientieren wir uns stark an GILKEY [8], Kapitel 1. Eine grundlegende Einführung in die Theorie der Sobolevräume findet man in ADAMS [1]. Die Theorie der Pseudodifferentialoperatoren wird sehr ausführlich in TAYLOR [14] dargestellt.

Auf Beweise werden wir in diesem Abschnitt weitgehend verzichten. Wir werden aber jeweils eine Quelle angeben.

In diesem Abschnitt sei grundsätzlich M eine geschlossene orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension m . E , F und G seien Hermitesche Vektorraumbündel über M . π bezeichnet die kanonische Projektion

$$\pi : T^*M \rightarrow M. \quad (1.3.1)$$

1.3.1 Definition:

$$\mathcal{A} = (U_i, \varphi_i)_{i \in I} \quad (1.3.2)$$

sei ein C^∞ -Atlas von M und

$$g = (g_i)_{i \in I} \subset C^\infty(M) \quad (1.3.3)$$

eine zu \mathcal{A} subordinierte Zerlegung der Eins. Wir dürfen annehmen, daß

$$\varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^m \quad (1.3.4)$$

für jedes $i \in I$ präkompakt ist. Aufgrund der Kompaktheit von M kann \mathcal{A} als endlich vorausgesetzt werden. Für $f \in C^\infty(M)$ und $s \in \mathbb{R}$ definieren wir die **Sobolevnorm** der Stufe s durch

$$\|f\|_{H^s(M)} := \sum_{i \in I} \left\| (\varphi_i^{-1})^* (g_i \cdot f) \right\|_{H^s(\mathbb{R}^m)}. \quad (1.3.5)$$

In GILKEY [8], S. 28 wird gezeigt, daß die so definierte Norm bis auf Äquivalenz unabhängig von der Wahl von \mathcal{A} und g ist.

Der **Sobolevraum** $H^s(M)$ wird nun als Vervollständigung von $C^\infty(M)$ bezüglich $\|\cdot\|_{H^s}$ definiert. $H^s(M)$ trägt eine Hilbertraumstruktur, die von $\|\cdot\|_{H^s}$ induziert wird. Wir definieren

$$H^\infty(M) := \bigcap_{s \in \mathbb{R}} H^s(M) \quad (1.3.6)$$

und

$$H^{-\infty}(M) := \bigcup_{s \in \mathbb{R}} H^s(M). \quad (1.3.7)$$

Bemerkung: Wie man sofort sieht, gilt wie in \mathbb{R}^n

$$H^0(M) \simeq L^2(M). \quad (1.3.8)$$

1.3.2 Definition: Sei

$$P : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M) \quad (1.3.9)$$

ein linearer Operator. Falls für jede offene und trivialisierbare Teilmenge $U \subset M$ und für alle $\varphi, \psi \in C_0^\infty(U)$

$$\varphi \cdot P \cdot \psi \in \Psi\text{Diff}_s(U) \quad (1.3.10)$$

ein Pseudodifferentialoperator der Ordnung $s \in \mathbb{R}$ auf U ist, dann nennt man P einen **Pseudodifferentialoperator** der Ordnung s auf M . Die Menge aller Pseudodifferentialoperatoren der Stufe s auf M bezeichnen wir mit $\Psi\text{Diff}_s(M)$. Wir setzen

$$\Psi\text{Diff}(M) := \bigcup_{s \in \mathbb{R}} \Psi\text{Diff}_s(M) \quad (1.3.11)$$

und

$$\Psi\text{Diff}_{-\infty}(M) := \bigcap_{s \in \mathbb{R}} \Psi\text{Diff}_s(M). \quad (1.3.12)$$

Falls für alle offenen und trivialisierbaren $U \subset M$, $x \in U$ und $\varphi, \psi \in C_0^\infty(U)$ mit

$$\varphi\psi(x) \neq 0 \quad (1.3.13)$$

der Operator $\varphi \cdot P \cdot \psi$ bei x elliptisch ist, heißt P **elliptisch**.

1.3.3 Lemma: (nach GILKEY [8], Lemma 1.3.3) Seien $P \in \Psi\text{Diff}_s(M)$ und $Q \in \Psi\text{Diff}_t(M)$ gegeben. Dann existiert P^* , und es gilt

$$P^* \in \Psi\text{Diff}_s(M). \quad (1.3.14)$$

Die Adjunktion von P bezieht sich hier auf $L^2(M)$. Außerdem gilt

$$PQ \in \Psi\text{Diff}_{s+t}(M). \quad (1.3.15)$$

1.3.4 Lemma: (nach GILKEY [8], Lemma 1.3.4) Für $s, t \in \mathbb{R}$ mit $s > t$ ist die natürliche Einbettung

$$H^s(M) \hookrightarrow H^t(M) \quad (1.3.16)$$

kompakt. Für $k \in \mathbb{Z}_+$ mit

$$s > k + \frac{m}{2} \quad (1.3.17)$$

gilt

$$H^s(M) \subset C^k(M). \quad (1.3.18)$$

Insbesondere folgt daraus

$$H^\infty(M) = C^\infty(M). \quad (1.3.19)$$

Für ein $P \in \Psi\text{Diff}_l(M)$ ist

$$P : H^s(M) \rightarrow H^{s-l}(M) \quad (1.3.20)$$

für jedes $s \in \mathbb{R}$ stetig.

Bemerkung: $H^s(E)$ kann analog zu $H^s(M)$ definiert werden, indem $\omega \in C^\infty(E)$ mittels Zerlegung der Eins lokalisiert wird. Zusätzlich muß dann noch E lokal trivialisiert werden.

Auch die Definition eines Pseudodifferentialoperators $P \in \Psi\text{Diff}(E, F)$ und die Definition der Elliptizität kann adaptiert werden, indem lokal nicht mit einem Pseudodifferentialoperator, sondern mit einer Matrix von Pseudodifferentialoperatoren argumentiert wird.

Die Aussagen aus Lemma 1.3.3 und Lemma 1.3.4 gelten analog auch in dieser Situation. Es gilt also für $P \in \Psi\text{Diff}_s(F, G)$, $Q \in \Psi\text{Diff}_t(E, F)$

$$P^* \in \Psi\text{Diff}_s(G, F) \quad (1.3.21)$$

und

$$PQ \in \Psi\text{Diff}_{s+t}(E, G). \quad (1.3.22)$$

Für

$$s > k + \frac{m}{2} \quad (1.3.23)$$

gilt

$$H^s(E) \subset C^k(E). \quad (1.3.24)$$

Für $P \in \Psi\text{Diff}_l(E, F)$ und $s \in \mathbb{R}$ ist

$$P : H^s(E) \rightarrow H^{s-l}(F) \quad (1.3.25)$$

stetig.

1.3.5 Lemma: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(E)$ sei eine Folge mit

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{H^p} a \in H^p(E) \quad (1.3.26)$$

und

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{H^q} b \in H^q(E) \quad (1.3.27)$$

für $p, q \in \mathbb{R}$. Dann gilt $a = b$.

Beweis: Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, daß $p \leq q$ gilt. Dann folgt mit Lemma 1.3.4 aus

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{H^q} b, \quad (1.3.28)$$

daß auch

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{H^p} b \quad (1.3.29)$$

gelten muß. Daraus folgt die Behauptung. ■

1.3.6 Lemma: (nach GILKEY [8], Lemma 1.3.5) Für einen elliptischen Pseudodifferentialoperator $P \in \Psi\text{Diff}_s(E, F)$ der Ordnung $s \in \mathbb{R}$ gibt es eine sogenannte **Parametrix** $Q \in \Psi\text{Diff}_{-s}(F, E)$, so daß

$$PQ - 1 \in \Psi\text{Diff}_{-\infty}(F) \quad \text{und} \quad QP - 1 \in \Psi\text{Diff}_{-\infty}(E) \quad (1.3.30)$$

gilt.

1.3.7 Korollar: Sei P wie in Lemma 1.3.6 gegeben. Falls für $\omega \in H^k(E)$ mit $k \in \mathbb{R}$

$$P\omega \in H^l(E) \quad (1.3.31)$$

mit $l \in \mathbb{R}$ gilt, dann folgt daraus $\omega \in H^{l+s}(E)$. Diese Eigenschaft nennt man **elliptische Regularität**.

Beweis: Sei Q eine Parametrix zu P , wie in Lemma 1.3.6 angegeben. Aus $\omega \in H^k(E)$ folgt wegen

$$QP - 1 \in \Psi\text{Diff}_{-\infty}(E), \quad (1.3.32)$$

daß

$$(QP - 1)\omega \in H^\infty(E) \quad (1.3.33)$$

gilt. Aus $Q \in \Psi\text{Diff}_{-s}(F, E)$ und $P\omega \in H^l(F)$ folgt

$$QP\omega \in H^{l+s}(E) \quad (1.3.34)$$

und damit

$$\omega = QP\omega - (QP - 1)\omega \in H^{l+s}(E). \quad (1.3.35)$$

■

1.3.8 Lemma: (nach GILKEY [8], Lemma 1.4.5) Für einen elliptischen Pseudodifferentialoperator $P \in \Psi\text{Diff}_s(E, F)$ gilt

$$\dim \ker P < \infty \quad (1.3.36)$$

und

$$\ker P \subset C^\infty(E). \quad (1.3.37)$$

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist

$$P : H^t(E) \rightarrow H^{t-s}(F) \quad (1.3.38)$$

ein Fredholmoperator. Insbesondere ist

$$P(H^t(E)) \quad (1.3.39)$$

in $H^{t-s}(F)$ abgeschlossen.

1.3.9 Definition: Seien E_1 und E_2 Hermitesche Vektorraumbündel über einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (eventuell mit Rand) X und

$$T \in \text{Diff}(E_1, E_2) \quad (1.3.40)$$

ein Differentialoperator. Dann gibt es zu T gemäß BRÜNING [3], Satz 4.1.5 einen auf

$$\left\{ g \in C^\infty(E_2) \mid \text{supp } g \subset \overset{\circ}{X} \right\} \quad (1.3.41)$$

eindeutig festgelegten **formaladjungierten** oder **transponierten Operator**

$$T^t \in \text{Diff}(E_2, E_1), \quad (1.3.42)$$

für den für $f \in C^\infty(E_1)$ mit $\text{supp } f \subset \overset{\circ}{X}$ und $g \in C^\infty(E_2)$ mit $\text{supp } g \subset \overset{\circ}{X}$

$$(Tf \mid g)_{L^2(E_2)} = (f \mid T^t g)_{L^2(E_1)} \quad (1.3.43)$$

gilt. Daher ist T bezüglich der L^2 -Norm abschließbar. Wir definieren die **minimale abgeschlossene Fortsetzung** T_{min} von T als den Abschluß von T und die **maximale abgeschlossene Fortsetzung** durch

$$T_{max} := (T_{min}^t)^*. \quad (1.3.44)$$

1.3.10 Satz: Unter den Voraussetzungen von Definition 1.3.9 gilt für jede abgeschlossene Erweiterung P von T , deren Adjungiertes auf allen Schnitten $f \in C^\infty(E_1)$ mit $\text{supp } f \subset \overset{\circ}{X}$ definiert ist

$$T_{min} \subset P \subset T_{max}. \quad (1.3.45)$$

Beweis: Da T_{min} als Abschluß von T definiert ist, gilt für P sicherlich

$$T_{min} \subset P. \quad (1.3.46)$$

Weiterhin ist P^* eine abgeschlossene Fortsetzung von T^t . Aus

$$T_{min}^t = T_{max}^* \quad (1.3.47)$$

folgt

$$T_{max}^* \subset P^* \quad (1.3.48)$$

und daher gilt

$$P \subset T_{max}. \quad (1.3.49)$$

■

Bemerkung: Die Bezeichnungen der *minimalen* und der *maximalen* abgeschlossenen Fortsetzung werden durch Satz 1.3.10 gerechtfertigt.

Bemerkung: Jeder Differentialoperator ist auch ein Pseudodifferentialoperator. Für einen Differentialoperator $P \in \text{Diff}_k(E, F)$ mit $k \in \mathbb{Z}_+$ kann festgestellt werden, ob P elliptisch ist, indem man das Hauptsymbol von P berechnet.

Seien $\xi \in T^*M$, $p = \pi(\xi)$, $e \in E_p$, $g \in C^\infty(M)$ mit $g(p) = 0$ und $dg(p) = \xi$ und $f \in C^\infty(E)$ mit $f(p) = e$ gegeben. Dabei steht dg für die äußere Ableitung von g . Das **Hauptsymbol** σ_P von P wird durch

$$\sigma_P(\xi)e := P\left(\frac{\sqrt{-1}^k}{k!}g^k f\right)(p) \quad (1.3.50)$$

definiert. Diese Definition ist unabhängig von der konkreten Wahl von g und f (vgl. BRÜNING [3], Definition 4.1.8 und die darauf folgende Bemerkung).

P ist genau dann elliptisch, wenn

$$\sigma_P(\xi) \in \text{Hom}(E_p, F_p) \quad (1.3.51)$$

für jedes $\xi \neq 0$ ein Endomorphismus ist.

Es gilt (vgl. BRÜNING [3], Satz 4.1.11) für $P \in \text{Diff}(F, G)$, $Q \in \text{Diff}(E, F)$ und $\xi \in \mathbb{T}^*M$

$$\sigma_{PQ}(\xi) = \sigma_P(\xi) \circ \sigma_Q(\xi) \quad (1.3.52)$$

und

$$\sigma_{P^t}(\xi) = (\sigma_P(\xi))^* . \quad (1.3.53)$$

Seien nun $P \in \text{Diff}_k(E, F)$ und $Q \in \text{Diff}_l(E, F)$ mit $k, l \in \mathbb{Z}_+$. Dann gilt für $\xi \in \mathbb{T}^*M$

$$\sigma_{P+Q}(\xi) = \begin{cases} \sigma_P(\xi) & \text{für } k > l \\ \sigma_P(\xi) + \sigma_Q(\xi) & \text{für } k = l . \\ \sigma_Q(\xi) & \text{für } k < l \end{cases} \quad (1.3.54)$$

2 Differentialformen und –operatoren

Wir wollen in diesem Kapitel verschiedene Fortsetzungen der äußeren Ableitung betrachten und einige Eigenschaften davon herleiten. Weiterhin untersuchen wir die Einschränkung von Differentialformen über Mannigfaltigkeiten mit Rand auf diesen Rand und machen Aussagen über die Vertauschbarkeit von äußerer Ableitung und Einschränkung in verschiedenen Räumen von Schnitten des äußeren Kotangentialbündels einer Mannigfaltigkeit. Wir werden eine spezielle Klasse von Randwertproblemen einführen und die Frage der Lösbarkeit dieser Probleme untersuchen. Insbesondere sollen Differentialformen auf kompakten Mannigfaltigkeiten mit Rand gesucht werden, deren äußere Ableitung und deren Einschränkung auf den Rand der Mannigfaltigkeit bestimmte Vorgaben erfüllen. Dabei werden wir besonderen Wert darauf legen, die Probleme so allgemein wie möglich zu formulieren. Das heißt, daß Lösungen in möglichst großen Funktionenräumen gesucht werden.

2.1 Spezielle Differentialoperatoren

2.1.1 Definition: Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (mit oder ohne Rand). Um die Notation zu vereinfachen, bezeichnen wir den Raum der glatten **Differentialformen** $C^\infty(\wedge T^*M)$ mit $\Omega(M)$ und die Räume $C^\infty(\wedge^k T^*M)$ mit $\Omega^k(M)$.

2.1.2 Definition: Sei M eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit (eventuell mit Rand).

$$d_{M,k} : \Omega_0^k(\overset{\circ}{M}) \rightarrow \Omega_0^{k+1}(\overset{\circ}{M}) \quad (2.1.1)$$

bezeichnet die **äußere** oder auch **Cartansche Ableitung** der Stufe k auf M . Setze

$$d_M := \bigoplus_k d_{M,k}. \quad (2.1.2)$$

d_M ist ein Differentialoperator erster Ordnung.

2.1.3 Definition: Unter den Voraussetzungen von Definition 2.1.2 wird $d_{M,k}^t$ mit $\delta_{M,k}$ bezeichnet. δ_M ist wiederum ein Differentialoperator der Ordnung 1.

2.1.4 Definition: Unter den Voraussetzungen von Definition 2.1.2 wird der **Abschluß** oder die **minimale abgeschlossene Fortsetzung** von $d_{M,k}$ in

$$L^2(T^* \wedge^k M) \rightarrow L^2(T^* \wedge^{k+1} M) \quad (2.1.3)$$

mit $d_{M,k,min}$ bezeichnet. Wir setzen

$$d_{M,min} := \bigoplus_k d_{M,k,min}. \quad (2.1.4)$$

Die **maximale abgeschlossene Fortsetzung** von $d_{M,k}$ in

$$L^2(T^* \wedge^k M) \rightarrow L^2(T^* \wedge^{k+1} M) \quad (2.1.5)$$

wird mit

$$d_{M,k,max} = (d_{M,k}^t)_{min}^* \quad (2.1.6)$$

oder kurz mit $D_{M,k}$ bezeichnet. Auch hier setzen wir wieder

$$D_M := d_{M,max} := \bigoplus_k d_{M,k,max} = \bigoplus_k D_{M,k}. \quad (2.1.7)$$

Der Definitionsbereich von $D_{M,k}$ wird mit $\mathcal{D}_{M,k}$, der von D_M mit \mathcal{D}_M bezeichnet.

Die Definitionsbereiche der zu $D_{M,k}$ und D_M adjungierten Operatoren $D_{M,k}^*$ und D_M^* werden mit $\mathcal{D}_{M,k}^*$ und \mathcal{D}_M^* bezeichnet.

2.1.5 Lemma: Sei M eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit (mit oder ohne Rand) der Dimension m . Dann gilt

$$\delta_{M,k} = d_{M,k}^t = (-1)^{mk+1} \star d_{M,m-k-1} \star, \quad (2.1.8)$$

$$D_{M,k}^* = (-1)^{mk+1} \star d_{M,m-k-1,min} \star \quad (2.1.9)$$

und

$$d_{M,k,min}^* = (-1)^{mk+1} \star D_{M,m-k-1} \star. \quad (2.1.10)$$

Beweis: Für $\omega \in \Omega_0^k(\overset{\circ}{M})$ und $\eta \in \Omega_0^{k+1}(\overset{\circ}{M})$ gilt mit dem klassischen Satz von Stokes

$$\begin{aligned} (d_{M,k}\omega \mid \eta)_{L^2} &= \int_M d_{M,k}\omega \wedge \star \bar{\eta} = \\ &= \int_M \left(d_{M,m-1}(\omega \wedge \star \bar{\eta}) - (-1)^k \omega \wedge d_{M,m-k-1} \star \bar{\eta} \right) = \\ &= (-1)^{k+1} \int_M \omega \wedge d_{M,m-k-1} \star \bar{\eta} = \\ &= (-1)^{mk+1} \int_M \omega \wedge \star \star d_{M,m-k-1} \star \bar{\eta} = \\ &= (-1)^{mk+1} (\omega \mid \star d_{M,m-k-1} \star \eta)_{L^2}. \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Damit ist die erste Aussage gezeigt.

Die zweite Aussage folgt aus der Definition von $D_{M,k}$. Da der Hodgeoperator punktweise definiert ist, gilt

$$D_{M,k}^* = \delta_{M,k,min} = (-1)^{mk+1} \star d_{M,m-k-1,min} \star. \quad (2.1.12)$$

Nun gilt

$$d_{M,k,min}^* = (\delta_{M,k}^t)_{min}^* = \delta_{M,k,max} = (-1)^{mk+1} \star D_{M,m-k-1}^*. \quad (2.1.13)$$

Damit ist auch die dritte Aussage gezeigt. ■

2.1.6 Definition: Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (eventuell mit Rand). Auf M seien zwei verschiedene Metriken g_1 und g_2 gegeben. Die beiden Metriken heißen zueinander **quasiisometrisch**, falls es positive Konstanten a und b gibt, so daß für alle $\omega \in \wedge T^*M$

$$a \cdot g_1(\omega, \omega) \leq g_2(\omega, \omega) \leq b \cdot g_1(\omega, \omega) \quad (2.1.14)$$

gilt.

2.1.7 Satz: Sei M eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit (eventuell mit Rand). Auf M seien zwei zueinander quasiisometrischen Metriken g_1 und g_2 gegeben. Betrachte den Isomorphismus

$$\Phi : L^2(\wedge T^*M, g_1) \rightarrow L^2(\wedge T^*M, g_2), \quad \omega \mapsto \omega. \quad (2.1.15)$$

Dann gilt für die äußeren Ableitungen d_M^1 und d_M^2 bezüglich g_1 bzw. g_2

$$d_{M,min}^1 = \Phi^{-1} \circ d_{M,min}^2 \circ \Phi \quad \text{und} \quad d_{M,max}^1 = \Phi^{-1} \circ d_{M,max}^2 \circ \Phi. \quad (2.1.16)$$

Beweis: Wegen

$$\Omega(M, g_2) = \Phi(\Omega(M, g_1)) \quad (2.1.17)$$

gilt

$$d_M^1 = \Phi^{-1} \circ d_M^2 \circ \Phi, \quad (2.1.18)$$

woraus

$$d_{M,min}^1 = \Phi^{-1} \circ d_{M,min}^2 \circ \Phi \quad (2.1.19)$$

folgt. Nun gilt

$$\Phi \in \text{Diff}(L^2(\wedge T^*M, g_1), L^2(\wedge T^*M, g_2)), \quad (2.1.20)$$

woraus

$$\Phi^* \in \text{Diff}(L^2(\wedge T^*M, g_2), L^2(\wedge T^*M, g_1)) \quad (2.1.21)$$

folgt. Daher bildet Φ^* glatte Formen auf glatte Formen ab. Entsprechendes gilt auch für $(\Phi^{-1})^*$. Es gilt also

$$(d_M^1)^t = \Phi^* \circ (d_M^2)^t \circ (\Phi^{-1})^*. \quad (2.1.22)$$

Daraus folgt

$$(d_M^1)_{min}^t = \Phi^* \circ (d_M^2)_{min}^t \circ (\Phi^{-1})^*, \quad (2.1.23)$$

woraus wir

$$\begin{aligned} d_{M,max}^1 &= \left((d_M^1)_{min}^t \right)^* = \\ &= \Phi^{-1} \circ \left((d_M^2)_{min}^t \right)^* \circ \Phi = \Phi^{-1} \circ d_{M,max}^2 \circ \Phi \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

erhalten.

■

Bemerkung: Unter den Voraussetzungen von Satz 2.1.7 können wir $L^2(\wedge T^*M, g_1)$ und $L^2(\wedge T^*M, g_2)$ vermöge Φ identifizieren. Mit dieser Identifikation — die wir im Folgenden implizit zugrundelegen werden — gilt dann also

$$d_{M,min}^1 = d_{M,min}^2 \quad \text{und} \quad d_{M,max}^1 = d_{M,max}^2. \quad (2.1.25)$$

2.1.8 Lemma: Auf einer kompakten orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit M sind zwei Metriken g_1 und g_2 zueinander immer quasiisometrisch.

Beweis: Die Aussage sieht man, wenn man das Kosphärenbündel S^*M von M betrachtet. Da M kompakt ist, ist S^*M eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Funktion

$$f : S^*M \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \omega \mapsto \frac{g_2(\omega, \omega)}{g_1(\omega, \omega)} \quad (2.1.26)$$

ist sicherlich stetig. Aufgrund der Kompaktheit von S^*M besitzt sie ein absolutes Minimum bei ω_{min} und ein absolutes Maximum bei ω_{max} . Damit sind Konstanten

$$a := f(\omega_{min}) \quad \text{und} \quad b := f(\omega_{max}) \quad (2.1.27)$$

gefunden, wie sie in Definition 2.1.6 gefordert werden. Da

$$T^*M \ni \omega \mapsto \sqrt{g_1(\omega, \omega)} \in \mathbb{R} \quad (2.1.28)$$

eine Norm ist, gilt sicherlich für alle $\omega \in S^*M$

$$g_1(\omega, \omega) \neq 0. \quad (2.1.29)$$

■

Bemerkung: Um Aussagen über \mathcal{D}_M oder $\mathcal{D}(d_{M,min})$ über einer kompakten Mannigfaltigkeit M zu machen, ist es wegen Satz 2.1.7 und Lemma 2.1.8 ausreichend, eine konkrete Metrik auf M zu wählen. Die daraus gewonnenen Resultate gelten dann auch für jede andere C^∞ -Metrik.

Weil der Hodgeoperator metrikabhängig ist, hängt d_M^\dagger von der gewählten Metrik ab. Auch die Operatoren D_M^* und $d_{M,min}^*$ hängen also von der auf M gewählten Metrik ab. Hier kann man sich deshalb nicht ohne weiteres auf eine konkrete Metrik beschränken. Allerdings kann man Aussagen über D_M^* oder $d_{M,min}^*$ oft auf Aussagen über D_M oder $d_{M,min}$ zurückführen, die man dann wieder in einer geeigneten Metrik zeigt.

2.1.9 Satz: Sei M eine geschlossene orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension m und seien E und F Hermitesche Vektorraumbündel über M . Für einen Differentialoperator $P \in \text{Diff}_1(E, F)$ gilt

$$P_{min} = P_{max}. \quad (2.1.30)$$

Beweis: Die Relation

$$P_{min} \subset P_{max} \quad (2.1.31)$$

ist offensichtlich.

Um die umgekehrte Inklusion zu zeigen, wählen wir zu M einen endlichen C^∞ -Atlas

$$\mathcal{A} = (U_i, \varphi_i)_{i \in I} \quad (2.1.32)$$

mit präkompakten Karten und eine subordinierte Zerlegung der Eins

$$g = (g_i)_{i \in I} \subset C^\infty(M). \quad (2.1.33)$$

Wir dürfen — gegebenenfalls nach Verkleinerung der einzelnen Karten — annehmen, daß es in jeder Karte lokale Rahmen für E und F gibt. Wenn wir für jedes $\omega \in \mathcal{D}(P_{max})$ und jedes $i \in I$ eine Folge $(\omega_{i,n})_{n \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(E)$ mit $\text{supp } \omega_{i,n} \subset U_i$ finden können, für die

$$\omega_{i,n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} g_i \cdot \omega \quad \text{und} \quad P\omega_{i,n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} P_{max}(g_i \cdot \omega) \quad (2.1.34)$$

gilt, dann folgt

$$\begin{aligned} \left\| \omega - \sum_{i \in I} \omega_{i,n} \right\|_{L^2} &= \left\| \sum_{i \in I} (g_i \cdot \omega - \omega_{i,n}) \right\|_{L^2} \leq \\ &\leq \sum_{i \in I} \|g_i \cdot \omega - \omega_{i,n}\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned} \quad (2.1.35)$$

und

$$\begin{aligned} \left\| P_{max} \omega - \sum_{i \in I} P \omega_{i,n} \right\|_{L^2} &= \left\| \sum_{i \in I} P_{max} (g_i \cdot \omega - \omega_{i,n}) \right\|_{L^2} \leq \\ &\leq \sum_{i \in I} \|P_{max} (g_i \cdot \omega - \omega_{i,n})\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (2.1.36)$$

Damit würde $\omega \in \mathcal{D}(P_{min})$ gelten.

Wir müssen jetzt für lokale $\omega \in \mathcal{D}(P_{max})$ eine Folge $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(E)$ finden, die bezüglich $\|\cdot\|_{P_{max}}$ gegen ω konvergiert. Da es sich um ein lokales Problem handelt, dürfen wir in \mathbb{R}^m rechnen.

Wir betrachten ein radialsymmetrisches $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ für das $f \geq 0$ und

$$\int_{\mathbb{R}^m} f = 1 \quad (2.1.37)$$

gilt. Dann definieren wir für $n \in \mathbb{N}$

$$j_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m) \quad (2.1.38)$$

durch

$$j_n(x) := n f(nx). \quad (2.1.39)$$

Für $u \in L_0^2(\mathbb{R}^m)$ wird der **Friedrichs–Glättungsoperator** J_n durch

$$J_n u := \int_{\mathbb{R}^m} j_n(\xi - \cdot) \cdot u(\xi) \, d\xi \quad (2.1.40)$$

definiert. Dann gilt

$$J_n u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m). \quad (2.1.41)$$

Zunächst betrachten wir $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$. Wir wählen $r > 0$ so, daß $\text{supp } v \subset B_r$ gilt. Dabei bezeichnet B_r den offenen Ball um 0 mit Radius r . Sei $t > 0$ so gewählt, daß $\text{supp } f \subset B_t$ gilt. Dann folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\text{supp } J_n v \subset B_{r+\frac{t}{n}} \subset B_{r+t}. \quad (2.1.42)$$

Da $\text{supp } v$ kompakt ist, ist v Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante L . Nun gilt

$$\begin{aligned}
\|J_n v - v\|_{L^2}^2 &= \int_{B_{r+t}} \left| \int_{\mathbb{R}^m} j_n(\xi - x) v(\xi) \, d\xi - v(x) \right|^2 dx = \\
&= \int_{B_{r+t}} \left| \int_{\mathbb{R}^m} j_n(\xi - x) (v(\xi) - v(x)) \, d\xi \right|^2 dx \leq \\
&\leq \frac{4t^2 L^2}{n^2} \int_{B_{r+t}} \left| \int_{\mathbb{R}^m} j_n(\xi - x) \, d\xi \right|^2 dx = \\
&= \frac{4t^2 L^2}{n^2} \text{vol}(B_{r+t}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned} \tag{2.1.43}$$

Für

$$T : C_0^\infty(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{C}, \quad v \mapsto (u | v)_{L^2} \tag{2.1.44}$$

und

$$T_n : C_0^\infty(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{C}, \quad v \mapsto (J_n u | v)_{L^2} \tag{2.1.45}$$

folgt daher für jedes $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$

$$\begin{aligned}
T_n(v) &= (J_n u | v)_{L^2} = \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} j_n(\xi - x) u(\xi) \, d\xi \bar{v}(x) \, dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} j_n(\xi - x) u(\xi) \bar{v}(x) \, dx \, d\xi = \\
&= (u | J_n v)_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (u | v)_{L^2} = T(v).
\end{aligned} \tag{2.1.46}$$

Das bedeutet, daß T_n für $n \rightarrow \infty$ bezüglich der schwachen Operatortopologie gegen T konvergiert. Gemäß YOSIDA [16], Theorem 6 auf S. 123 konvergiert T_n dann auch bezüglich der starken Operatortopologie gegen T . Das heißt, daß

$$\sup_{\substack{v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m) \\ \|v\|_{L^2} \leq 1}} |T(v) - T_n(v)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \tag{2.1.47}$$

gilt. Mit

$$v_n := \begin{cases} 0 & \text{für } u = J_n u, \\ \|u - J_n u\|_{L^2}^{-1} (u - J_n u) & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.1.48}$$

gilt insbesondere

$$|(T - T_n)(v_n)| = \|u - J_n u\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (2.1.49)$$

woraus

$$J_n u \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} u \quad (2.1.50)$$

folgt (vgl. FRIEDRICHS [6], Abschnitt 2). Wir betrachten

$$h_x : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \xi \mapsto \xi - x. \quad (2.1.51)$$

Es gilt für $P \in \text{Diff}_1(\mathbb{R}^m)$ und $u \in \mathcal{D}(P_{max})$ mit $\text{supp } u$ kompakt

$$\begin{aligned} J_n P_{max} u(x) &= \int_{\mathbb{R}^m} j_n(\xi - x) \cdot P_{max} u(\xi) \, d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} j_n \circ h_x(\xi) \cdot P_{max} u(\xi) \, d\xi = \\ &= - \int_{\mathbb{R}^m} P(j_n \circ h_x)(\xi) \cdot u(\xi) \, d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} P(j_n(\xi - \cdot) \cdot u(\xi))(x) \, d\xi = \\ &= P \int_{\mathbb{R}^m} j_n(\xi - \cdot) \cdot u(\xi) \, d\xi(x) = \\ &= P J_n u(x), \end{aligned} \quad (2.1.52)$$

wie man aufgrund der lokalen Darstellung eines Differentialoperators mittels partieller Integration sieht. Daher gilt

$$J_n u \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} u \quad \text{und} \quad P J_n u \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} P_{max} u. \quad (2.1.53)$$

■

2.1.10 Korollar: Sei M eine geschlossene orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gilt

$$d_{M,min} = d_{M,max} = D_M. \quad (2.1.54)$$

Beweis: Da d_M ein Differentialoperator erster Ordnung ist, ist dies eine direkte Folgerung aus Satz 2.1.9. Dieses Resultat geht auf GAFFNEY [7] zurück. ■

Bemerkung: Für eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit M (mit oder ohne Rand) der Dimension m gilt

$$d_{M,k,max}^* = (-1)^{mk+1} \star d_{M,m-k-1,min} \star, \quad (2.1.55)$$

wie in Lemma 2.1.5 gezeigt wurde. Falls M geschlossen ist, folgt also aus Korollar 2.1.10, daß

$$D_{M,k}^* = (-1)^{mk+1} \star D_{M,m-k-1} \star \quad (2.1.56)$$

gilt.

2.1.11 Theorem: (nach BRÜNING / LESCH [4], Theorem 4.1) Sei M eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension m mit Rand. Der Rand von M wird mit $N = \partial M$ bezeichnet. Auf M wählen wir eine Metrik, die in der Nähe des Randes eine Produktstruktur

$$dx^2 \oplus g_N \quad (2.1.57)$$

trägt. Mit \widetilde{M} bezeichnen wir die kompakte Verdopplung von M . α sei die natürliche Involution auf \widetilde{M} , die die beiden Kopien von M vertauscht. Nach Lemma 1.2.1 zerfällt $\mathcal{D}_{\widetilde{M}}$ in die Eigenräume $\mathcal{D}_{\widetilde{M}} \cap H^+$ und $\mathcal{D}_{\widetilde{M}} \cap H^-$ zu den Eigenwerten $+1$ und -1 von α^* . Es gilt nun

$$\mathcal{D}(d_{M,min}) = \left(\mathcal{D}_{\widetilde{M}} \cap H^- \right) \Big|_M \quad (2.1.58)$$

und

$$\mathcal{D}(d_{M,max}) = \left(\mathcal{D}_{\widetilde{M}} \cap H^+ \right) \Big|_M. \quad (2.1.59)$$

Beweis: Auf \widetilde{M} gilt

$$\alpha^* g = g, \quad (2.1.60)$$

und es gibt einen Kragen U um N , der bezüglich der Produktmetrik

$$dx^2 \oplus g_N \quad (2.1.61)$$

isometrisch zu $(-1, 1) \times N$ ist.

Da $D_M|_{(\mathcal{D}_{\tilde{M}} \cap H^-)|_M}$ eine abgeschlossene Fortsetzung von d_M ist, gilt

$$\mathcal{D}(d_{M,min}) \subset \left(\mathcal{D}_{\tilde{M}} \cap H^-\right)|_M. \quad (2.1.62)$$

Es muß nun gezeigt werden, daß auch

$$\left(\mathcal{D}_{\tilde{M}} \cap H^-\right)|_M \subset \mathcal{D}(d_{M,min}) \quad (2.1.63)$$

gilt. Sei dazu

$$\omega \in \left(\mathcal{D}_{\tilde{M}} \cap H^-\right)|_M \quad (2.1.64)$$

gegeben. Setze ω zu

$$\tilde{\omega} \in \mathcal{D}_{\tilde{M}} \cap H^- \quad (2.1.65)$$

fort. Dann gibt es wegen Korollar 2.1.10 eine Folge

$$\left(\tilde{\omega}_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega(\tilde{M}) \quad (2.1.66)$$

mit

$$\tilde{\omega}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} \tilde{\omega} \quad \text{und} \quad d_{\tilde{M}} \tilde{\omega}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} D_{\tilde{M}} \tilde{\omega}. \quad (2.1.67)$$

Wenn wir

$$\tilde{\omega}_n := \frac{1}{2} \left(\tilde{\omega}_n - \alpha^* \tilde{\omega}_n \right) \quad (2.1.68)$$

setzen, erhalten wir eine Folge

$$\left(\tilde{\omega}_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega(\tilde{M}) \cap H^- \quad (2.1.69)$$

mit

$$\tilde{\omega}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} \tilde{\omega} \quad \text{und} \quad d_{\tilde{M}} \tilde{\omega}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} D_{\tilde{M}} \tilde{\omega}. \quad (2.1.70)$$

Es genügt also,

$$\left(\Omega(\tilde{M}) \cap H^-\right)|_M \subset \mathcal{D}(d_{M,min}) \quad (2.1.71)$$

zu zeigen.

Auf U gilt dann für $\tilde{\omega} \in \Omega(\tilde{M}) \cap H^-$

$$\tilde{\omega} = \omega_0 + \omega_1 \wedge dx, \quad (2.1.72)$$

wobei $\omega_0(x)$ und $\omega_1(x)$ für $x \in (-1, 1)$ in $\Omega(N)$ liegen. Dabei gilt

$$\omega_0(-x) = -\omega_0(x) \quad \text{und} \quad \omega_1(-x) = \omega_1(x), \quad (2.1.73)$$

also insbesondere

$$\omega_0(0) = 0. \quad (2.1.74)$$

Wähle nun ein

$$\varphi \in C_0^\infty(-1, 1), \quad (2.1.75)$$

so daß für alle $x \in (-1, 1)$

$$\varphi(x) = \varphi(-x) \quad (2.1.76)$$

und in der Nähe von 0

$$\varphi = 1 \quad (2.1.77)$$

gilt. Setze

$$\varphi_n(x) := \varphi(nx) \quad (2.1.78)$$

und

$$\tilde{\omega}_n := (1 - \varphi_n)\tilde{\omega}. \quad (2.1.79)$$

Es gilt dann

$$\tilde{\omega}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} \tilde{\omega}, \quad (2.1.80)$$

und

$$d_M \tilde{\omega}_n = (1 - \varphi_n) d_M \tilde{\omega} - \varphi_n' dx \wedge \omega_0. \quad (2.1.81)$$

Da

$$\omega_0(\cdot, p) : [-1, 1] \rightarrow T_p^*N \quad (2.1.82)$$

für jedes $p \in N$ eine C^∞ -Abbildung ist, ist $\omega(\cdot, p)$ Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante L_p . Wegen der Kompaktheit von N gilt

$$L := \sup_{p \in N} L_p < \infty. \quad (2.1.83)$$

Da

$$\text{supp } \varphi_n' \subset \text{supp } \varphi_n \subset \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \quad (2.1.84)$$

gilt, folgt mit

$$C := \sup_{|x|<1} |\varphi'(x)| < \infty \quad (2.1.85)$$

$$\begin{aligned} \|\varphi'_n dx \wedge \omega_0\|_{L^2}^2 &= n^2 \int_{N - \frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |\varphi'(nx) \omega_0|^2 \leq \\ &\leq n^2 C^2 L^2 \int_{N - \frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} x^2 = \frac{2 \operatorname{vol}(N) C^2 L^2}{3n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (2.1.86)$$

Daher gilt

$$d_{\tilde{M}} \tilde{\omega}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} d_{\tilde{M}} \tilde{\omega}. \quad (2.1.87)$$

Folglich liegt $\tilde{\omega}|_M$ in $\mathcal{D}(d_{M, \min})$, weil $\tilde{\omega}_n|_M \in \Omega_0(\overset{\circ}{M})$ gilt.

Bei der zweiten Aussage ist die Inklusion

$$\left(\mathcal{D}_{\tilde{M}} \cap H^+ \right) \Big|_M \subset \mathcal{D}_M \quad (2.1.88)$$

leicht zu sehen. Für $\tilde{\omega} \in \mathcal{D}_{\tilde{M}}$ und $\eta \in \Omega_0(\overset{\circ}{M})$ setzen wir nämlich η trivial zu $\tilde{\eta} \in \Omega(\tilde{M})$ fort. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left(D_{\tilde{M}} \Big|_M \tilde{\omega}|_M \mid \eta \right)_{L^2} &= \left(\left(D_{\tilde{M}} \tilde{\omega} \right) \Big|_M \mid \eta \right)_{L^2} = \\ &= \left(D_{\tilde{M}} \tilde{\omega} \mid \tilde{\eta} \right)_{L^2} = \\ &= \left(\tilde{\omega} \mid D_{\tilde{M}}^* \tilde{\eta} \right)_{L^2} = \left(\tilde{\omega}|_M \mid D_{\tilde{M}}^* \Big|_M \tilde{\eta} \right)_{L^2}. \end{aligned} \quad (2.1.89)$$

Daraus folgt

$$\Omega_0(\overset{\circ}{M}) \subset \mathcal{D} \left(\left(D_{\tilde{M}} \Big|_M \right)^* \right). \quad (2.1.90)$$

Aus Satz 1.3.10 erhalten wir

$$\mathcal{D}_{\tilde{M}} \Big|_M \subset \mathcal{D}_M. \quad (2.1.91)$$

Sei β gegeben durch

$$\begin{aligned} \beta : \Omega(M) &\rightarrow L^2(\wedge T^* \tilde{M}) \\ \omega &\mapsto \tilde{\omega}, \end{aligned} \quad (2.1.92)$$

wobei $\tilde{\omega}$ definiert ist durch

$$\tilde{\omega}(p) := \begin{cases} \omega(p) & \text{falls } p \in M \\ \alpha^* \omega(p) & \text{sonst} \end{cases}. \quad (2.1.93)$$

β kann durch Stetigkeit zu

$$\beta : L^2(\wedge T^* M) \rightarrow L^2(\wedge T^* \tilde{M}) \quad (2.1.94)$$

fortgesetzt werden.

Wähle ein $\omega \in \mathcal{D}_M$ und setze es durch β zu

$$\tilde{\omega} := \beta \omega \in L^2(\wedge T^* \tilde{M}) \quad (2.1.95)$$

fort. Dann liegt $\tilde{\omega}$ sicherlich in H^+ . Falls wir zeigen können, daß mit einer geeigneten Konstante C für jedes $\tilde{\eta} \in \Omega(\tilde{M})$

$$\left| \left(\tilde{\omega} \mid d_{\tilde{M}}^t \tilde{\eta} \right)_{L^2} \right| \leq C \|\tilde{\eta}\|_{L^2} \quad (2.1.96)$$

gilt, folgt aus dem Satz von Riesz (siehe YOSIDA [16], S. 90), daß es ein $\tilde{\vartheta} \in L^2(\wedge T^* \tilde{M})$ gibt, so daß für alle $\tilde{\eta} \in \Omega(\tilde{M})$

$$\left(\tilde{\omega} \mid d_{\tilde{M}}^t \tilde{\eta} \right)_{L^2} = \left(\tilde{\vartheta} \mid \tilde{\eta} \right)_{L^2} \quad (2.1.97)$$

gilt, weil

$$\Omega(\tilde{M}) \subset L^2(\wedge T^* M) \quad (2.1.98)$$

dicht liegt. Es folgt also dann

$$\tilde{\omega} \in \mathcal{D}_{\tilde{M}} \quad \text{und} \quad \tilde{\vartheta} = D_{\tilde{M}} \tilde{\omega}. \quad (2.1.99)$$

Damit folgt

$$\mathcal{D}_M \subset \left(\mathcal{D}_{\tilde{M}} \cap H^+ \right) \Big|_M. \quad (2.1.100)$$

Da $\omega \in \mathcal{D}_M$ vorausgesetzt wurde, gilt Formel (2.1.96) sicherlich für alle $\tilde{\eta}$, die in einer Umgebung von N identisch verschwinden. Es genügt also, mit dem φ_n von oben zu zeigen, daß

$$\left(\tilde{\omega} \mid d_{\tilde{M}}^t ((1 - \varphi_n) \tilde{\eta}) \right)_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\tilde{\omega} \mid d_{\tilde{M}}^t \tilde{\eta} \right)_{L^2} \quad (2.1.101)$$

für jedes $\tilde{\eta} \in \Omega(\tilde{M})$ gilt. Dann gilt nämlich

$$\begin{aligned} \left| \left(\tilde{\omega} \mid d_{\tilde{M}}^t \tilde{\eta} \right)_{L^2} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\tilde{\omega} \mid d_{\tilde{M}}^t ((1 - \varphi_n) \tilde{\eta}) \right)_{L^2} \right| \leq \\ &\leq C \lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \varphi_n) \tilde{\eta}\|_{L^2} = C \|\tilde{\eta}\|_{L^2}. \end{aligned} \quad (2.1.102)$$

Sei nun $\tilde{\eta} \in \Omega^{k+1}(\tilde{M})$. Analog zu vorher kann $\tilde{\eta}$ auf U zerlegt werden in

$$\tilde{\eta} = \eta_0 + \eta_1 \wedge dx \quad (2.1.103)$$

mit $\eta_0(x) \in \Omega^{k+1}(N)$ und $\eta_1(x) \in \Omega^k(N)$. Es gilt

$$\begin{aligned} & d_{\tilde{M},k}^t((1 - \varphi_n)\tilde{\eta}) = \\ &= (1 - \varphi_n) d_{\tilde{M},k}^t \tilde{\eta} + (-1)^{mk+1} \star \left(d_{\tilde{M},0} (1 - \varphi_n) \wedge \star \tilde{\eta} \right) = \\ &= (1 - \varphi_n) d_{\tilde{M},k}^t \tilde{\eta} + d_{\tilde{M},0} \varphi_n \lrcorner \tilde{\eta} = \\ &= (1 - \varphi_n) d_{\tilde{M},k}^t \tilde{\eta} + \varphi'_n dx \lrcorner \tilde{\eta} = \\ &= (1 - \varphi_n) d_{\tilde{M},k}^t \tilde{\eta} + \varphi'_n dx \lrcorner (\eta_1 \wedge dx) = \\ &= (1 - \varphi_n) d_{\tilde{M},k}^t \tilde{\eta} + (-1)^k \varphi'_n \eta_1. \end{aligned} \quad (2.1.104)$$

Wir können η_1 in

$$\eta_1 = \eta_1^+ + \eta_1^- \in H^+ \oplus H^- \quad (2.1.105)$$

zerlegen. Da φ_n gerade ist, ist φ'_n ungerade. Es gilt also

$$\varphi'_n \eta_1^+ \in H^-. \quad (2.1.106)$$

Da α^* auf U eine Isometrie ist, folgt wegen $\tilde{\omega} \in H^+$ aus Lemma 1.2.2

$$(\tilde{\omega} \mid \varphi'_n \eta_1^+) = 0. \quad (2.1.107)$$

Es gilt

$$\eta_1^-(-x) = -\eta_1^-(x), \quad (2.1.108)$$

woraus

$$\eta_1^-(0) = 0 \quad (2.1.109)$$

folgt. Daher folgt analog zum ersten Teil dieses Beweises, daß

$$\varphi'_n \eta_1^- \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} 0 \quad (2.1.110)$$

konvergiert. Zusammenfassend erhalten wir also Formel (2.1.101), weil sicherlich

$$(1 - \varphi_n) d_{\tilde{M}}^t \tilde{\eta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} d_{\tilde{M}}^t \tilde{\eta} \quad (2.1.111)$$

gilt. Deshalb liegt $\tilde{\omega}$ in $\mathcal{D}_{\tilde{M}} \cap H^+$. Daraus folgt

$$\mathcal{D}_M \subset \left(\mathcal{D}_{\tilde{M}} \cap H^+ \right) \Big|_M. \quad (2.1.112)$$

■

2.1.12 Satz: (nach BRÜNING/LESCH [4], Lemma 3.1) Sei M eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit (mit oder ohne Rand) der Dimension m . Mit

$$H_i = L^2(\wedge^i T^* M) \quad (2.1.113)$$

sind

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_{M,0} \xrightarrow{D_{M,0}} \dots \xrightarrow{D_{M,m-1}} \mathcal{D}_{M,m} \longrightarrow 0 = \quad (2.1.114)$$

$$= 0 \longrightarrow \mathcal{D}(d_{M,0,max}) \xrightarrow{d_{M,0,max}} \dots \xrightarrow{d_{M,m-1,max}} \mathcal{D}(d_{M,m,max}) \longrightarrow 0 \quad (2.1.115)$$

und

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}(d_{M,0,min}) \xrightarrow{d_{M,0,min}} \dots \xrightarrow{d_{M,m-1,min}} \mathcal{D}(d_{M,m,min}) \longrightarrow 0 \quad (2.1.116)$$

Hilbertkomplexe, die mit

$$(\mathcal{D}_M, D_M) = (\mathcal{D}(d_{M,max}), d_{M,max}) \quad (2.1.117)$$

bzw.

$$(\mathcal{D}(d_{M,min}), d_{M,min}) \quad (2.1.118)$$

bezeichnet werden.

$$0 \longrightarrow \Omega_0^0(\overset{\circ}{M}) \xrightarrow{d_{M,0}} \dots \xrightarrow{d_{M,m-1}} \Omega_0^m(\overset{\circ}{M}) \longrightarrow 0 \quad (2.1.119)$$

heißt der **de Rham Komplex** über M .

$$(\mathcal{D}_M, D_M) \quad \text{und} \quad (\mathcal{D}(d_{M,min}), d_{M,min}) \quad (2.1.120)$$

werden als **maximale** und **minimale abgeschlossene Fortsetzung** davon bezeichnet.

Beweis: Es ist zu zeigen, daß

$$\text{im } d_{M,k,max} \subset \ker d_{M,k+1,max} \quad (2.1.121)$$

und

$$\text{im } d_{M,k,min} \subset \ker d_{M,k+1,min} \quad (2.1.122)$$

gilt.

Wir betrachten zunächst $d_{M,min}$. Für jedes $\omega \in \mathcal{D}(d_{M,k,min})$ gibt es eine Folge $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega_0^k(\overset{\circ}{M})$, so daß

$$\omega_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} \omega \quad \text{und} \quad d_{M,k}\omega_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} d_{M,k,min}\omega \quad (2.1.123)$$

gilt. Aus

$$d_{M,k+1} \circ d_{M,k}(\omega_n) = 0 \quad (2.1.124)$$

folgt

$$d_{M,k,min}\omega \in \ker d_{M,k+1,min}. \quad (2.1.125)$$

Da die analogen Überlegungen auch für $d_{M,min}^t$ gelten, ist $(\mathcal{D}_M^*, \mathcal{D}_M^*)$ ein Hilbertkomplex. Der dazu duale Komplex ist aber gerade $(\mathcal{D}_M, \mathcal{D}_M)$. ■

2.1.13 Definition: Sei M eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit (eventuell mit Rand). Wir betrachten den Hilbertkomplex $(\mathcal{D}_M, \mathcal{D}_M)$. Der zugehörige **Laplaceoperator** wird mit

$$\Delta_M = \bigoplus_k \Delta_{M,k} \quad (2.1.126)$$

bezeichnet.

Die Menge der harmonischen Differentialformen der Stufe k bezüglich dieses Hilbertkomplexes wird mit $\widehat{\mathcal{H}}_{M,k}$ bezeichnet. Wir setzen

$$\widehat{\mathcal{H}}_M := \bigoplus_k \widehat{\mathcal{H}}_{M,k}. \quad (2.1.127)$$

2.1.14 Lemma: Betrachte den Komplex

$$(\mathcal{D}_M, \mathcal{D}_M) \quad (2.1.128)$$

über einer geschlossenen orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit M . Dann ist der zugehörige Laplaceoperator

$$\Delta_M = (\mathcal{D}_M + \mathcal{D}_M^*)^2 \quad (2.1.129)$$

elliptisch. Auch der Operator

$$\mathcal{D}_M + \mathcal{D}_M^* \quad (2.1.130)$$

ist dann elliptisch.

Beweis: Das Hauptsymbol eines Differentialoperators Q bezeichnen wir mit σ_Q (vgl. Bemerkung am Ende von Abschnitt 1.3). Wie man leicht sieht, gilt

$$\sigma_{d_M}(\xi)e = \sqrt{-1}\xi \wedge e \quad (2.1.131)$$

für $p \in M$, $\xi \in T_p^*M$ und $e \in \wedge T_p^*M$. Daher gilt

$$\sigma_{d_M^t}(\xi)e = (\sigma_{d_M}(\xi))^*e = \sqrt{-1}\xi \lrcorner e \quad (2.1.132)$$

und damit

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta_M}(\xi)e &= \sigma_{(d_M + d_M^t)^2}(\xi)e = \\ &= (\sigma_{d_M}(\xi) + (\sigma_{d_M}(\xi))^*)^2 e = \\ &= -\xi \wedge (\xi \wedge e) - \xi \wedge (\xi \lrcorner e) - \xi \lrcorner (\xi \wedge e) - \xi \lrcorner (\xi \lrcorner e) = \\ &= -|\xi|^2 e. \end{aligned} \quad (2.1.133)$$

Daher ist Δ_M elliptisch. Falls $D_M + D_M^*$ nicht elliptisch wäre, dann wäre auch

$$\Delta_M = (D_M + D_M^*)^2 \quad (2.1.134)$$

nicht elliptisch. Folglich muß $P + P^*$ elliptisch sein. ■

2.1.15 Satz: (nach BRÜNING / LESCH [4], Theorem 4.1) Sei M wie in Definition 2.1.13 gegeben.

$$(\mathcal{D}_M, D_M) \quad \text{und} \quad (\mathcal{D}(d_{M,min}), d_{M,min}) \quad (2.1.135)$$

sind Fredholmkomplexe. Damit vereinfacht sich die Hodgezerlegung nach Satz 1.1.8 zu

$$L^2(\wedge^k T^*M) = \widehat{\mathcal{H}}_{M,max,k} \oplus \text{im } D_{M,k-1} \oplus \text{im } D_{M,k}^* \quad (2.1.136)$$

bzw. zu

$$L^2(\wedge^k T^*M) = \widehat{\mathcal{H}}_{M,min,k} \oplus \text{im } d_{M,k-1,min} \oplus \text{im } d_{M,k,min}^*. \quad (2.1.137)$$

$\widehat{\mathcal{H}}_{M,max}$ und $\widehat{\mathcal{H}}_{M,min}$ bezeichnen die Menge der harmonischen Formen bezüglich $(\mathcal{D}(d_{M,max}), d_{M,max})$ bzw. $(\mathcal{D}(d_{M,min}), d_{M,min})$.

Beweis: Es ist nur zu zeigen, daß $\mathcal{H}_{M,min}$ und $\mathcal{H}_{M,max}$ endlichdimensional sind. Mit den Bezeichnungen von Theorem 2.1.11 ist $\Delta_{\widetilde{M}}$ ein elliptischer Differentialoperator der Ordnung 2. Wegen Lemma 1.3.8 ist

$$\Delta_{\widetilde{M}} : H^2 \left(\wedge T^* \widetilde{M} \right) \rightarrow L^2 \left(\wedge T^* \widetilde{M} \right) \quad (2.1.138)$$

ein Fredholmoperator, was insbesondere bedeutet, daß

$$\Delta_{\widetilde{M}} \left(H^2 \left(\wedge T^* \widetilde{M} \right) \right) \subset L^2 \left(\wedge T^* \widetilde{M} \right) \quad (2.1.139)$$

abgeschlossen ist. Nun gilt aber für $\Delta_{\widetilde{M}}$ als Abbildung von $L^2 \left(\wedge T^* \widetilde{M} \right)$ nach $L^2 \left(\wedge T^* \widetilde{M} \right)$ aufgrund der elliptischen Regularität von $\Delta_{\widetilde{M}}$ (siehe Lemma 2.1.14) gerade

$$\mathcal{D} \left(\Delta_{\widetilde{M}} \right) = H^2 \left(\wedge T^* \widetilde{M} \right). \quad (2.1.140)$$

Daraus folgt, daß

$$\text{im } \Delta_{\widetilde{M}} \subset L^2 \left(\wedge T^* \widetilde{M} \right) \quad (2.1.141)$$

abgeschlossen ist. Da $\Delta_{\widetilde{M}}$ selbstadjungiert ist, folgt mit Satz 1.1.8

$$\begin{aligned} L^2 \left(\wedge T^* \widetilde{M} \right) &= \ker \Delta_{\widetilde{M}} \oplus \overline{\text{im } \Delta_{\widetilde{M}}} = \\ &= \ker \Delta_{\widetilde{M}} \oplus \text{im } \Delta_{\widetilde{M}} \subset \\ &\subset \widehat{\mathcal{H}}_{\widetilde{M}} \oplus \text{im } D_{\widetilde{M}} D_{\widetilde{M}}^* \oplus \text{im } D_{\widetilde{M}}^* D_{\widetilde{M}} \subset \\ &\subset \widehat{\mathcal{H}}_{\widetilde{M}} \oplus \text{im } D_{\widetilde{M}} \oplus \text{im } D_{\widetilde{M}}^* \subset \\ &\subset \widehat{\mathcal{H}}_{\widetilde{M}} \oplus \overline{\text{im } D_{\widetilde{M}}} \oplus \overline{\text{im } D_{\widetilde{M}}^*} = L^2 \left(\wedge T^* \widetilde{M} \right). \end{aligned} \quad (2.1.142)$$

Es muß also jeweils Gleichheit gelten. Daher ist

$$\text{im } D_{\widetilde{M}} \subset L^2 \left(\wedge T^* \widetilde{M} \right) \quad (2.1.143)$$

abgeschlossen, woraus

$$\mathcal{H}_{\widetilde{M}} = \ker D_{\widetilde{M}} / \text{im } D_{\widetilde{M}} = \ker D_{\widetilde{M}} / \overline{\text{im } D_{\widetilde{M}}} \simeq \widehat{\mathcal{H}}_{\widetilde{M}} \quad (2.1.144)$$

folgt. Da $\widehat{\mathcal{H}}_{\widetilde{M}}$ wegen der Elliptizität von $\Delta_{\widetilde{M}}$ endlichdimensional ist, gilt auch

$$\dim \mathcal{H}_{\widetilde{M}} < \infty. \quad (2.1.145)$$

$(\mathcal{D}_{\widetilde{M}}, \mathcal{D}_{\widetilde{M}})$ ist also ein Fredholmkomplex.

Die Projektionen

$$\left(\mathcal{D}_{\tilde{M}}, \mathcal{D}_{\tilde{M}} \right) \rightarrow \left(\mathcal{D}_{\tilde{M}} \cap H^\pm, \mathcal{D}_{\tilde{M}} \Big|_{\mathcal{D}_{\tilde{M}} \cap H^\pm} \right) \quad (2.1.146)$$

sind surjektive Komplexabbildungen. Für

$$\tilde{\vartheta} := \mathcal{D}_{\tilde{M}} \tilde{\omega} \in \overline{\text{im } \mathcal{D}_{\tilde{M}} \Big|_{\mathcal{D}_{\tilde{M}} \cap H^\pm}} \quad (2.1.147)$$

mit $\tilde{\omega} \in \mathcal{D}_{\tilde{M}}$ gibt es eine Folge $(\tilde{\omega}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega(\tilde{M})$ mit

$$\tilde{\omega}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} \tilde{\omega} \quad (2.1.148)$$

und

$$\mathcal{D}_{\tilde{M}} \tilde{\omega}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} \mathcal{D}_{\tilde{M}} \tilde{\omega}, \quad (2.1.149)$$

woraus

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\mathcal{D}_{\tilde{M}} (\tilde{\omega}_n \pm \alpha^* \tilde{\omega}_n) \right) &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{D}_{\tilde{M}} \tilde{\omega}_n \pm \alpha^* \mathcal{D}_{\tilde{M}} \tilde{\omega}_n \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{D}_{\tilde{M}} \tilde{\omega} \pm \alpha^* \mathcal{D}_{\tilde{M}} \tilde{\omega} \right) = \frac{1}{2} \left(\tilde{\vartheta} \pm \alpha^* \tilde{\vartheta} \right) = \tilde{\vartheta} \end{aligned} \quad (2.1.150)$$

folgt. Man beachte, daß der glatte Pullback einer C^∞ -Funktion mit der äußeren Ableitung vertauscht (siehe zum Beispiel BOTT / TU [2], Satz 2.1 — die Aussage wird dort zwar nur im \mathbb{R}^n bewiesen, was aber ausreichend ist, da es sich um eine lokale Aussage handelt). Folglich liegt $\tilde{\vartheta}$ in $\text{im } \mathcal{D}_{\tilde{M}} \Big|_{\mathcal{D}_{\tilde{M}} \cap H^\pm}$ selbst und nicht nur im Abschluß davon. Nach Theorem 2.1.11 sind die Abbildungen

$$\left(\mathcal{D}_{\tilde{M}} \cap H^+, \mathcal{D}_{\tilde{M}} \Big|_{\mathcal{D}_{\tilde{M}} \cap H^+} \right) \rightarrow (\mathcal{D}(\mathfrak{d}_{M,max}), \mathfrak{d}_{M,max}) \quad (2.1.151)$$

und

$$\left(\mathcal{D}_{\tilde{M}} \cap H^-, \mathcal{D}_{\tilde{M}} \Big|_{\mathcal{D}_{\tilde{M}} \cap H^-} \right) \rightarrow (\mathcal{D}(\mathfrak{d}_{M,min}), \mathfrak{d}_{M,min}) \quad (2.1.152)$$

Komplexisomorphismen. Damit folgt die Fredholmeigenschaft für beide Hilbertkomplexe. ■

2.1.16 Definition: Sei M eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit (eventuell mit Rand). Für $\chi \in \ker D_{M,k}$ bezeichnet $[\chi]_M$ die **de Rham Kohomologieklass**e von χ auf M , also die Äquivalenzklasse von χ in $\ker D_{M,k}$ modulo $\text{im } D_{M,k-1}$.

2.1.17 Lemma: Sei M eine geschlossene orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Es gilt

$$\text{im } d_{M,k} = \text{im } D_{M,k} \cap \Omega^{k+1}(M). \quad (2.1.153)$$

Beweis: Es ist klar, daß

$$\text{im } d_{M,k} \subset \text{im } D_{M,k} \cap \Omega^{k+1}(M) \quad (2.1.154)$$

gilt. Betrachte nun ein

$$\chi = D_{M,k}\mu \in \text{im } D_{M,k} \cap \Omega^{k+1}(M). \quad (2.1.155)$$

Wir dürfen wegen Satz 2.1.15 ohne Einschränkung annehmen, daß $\mu \in \text{im } D_{M,k}^*$ gilt. Dann gilt

$$(D_{M,k} + D_{M,k-1}^*)\mu = \chi. \quad (2.1.156)$$

Aus der Elliptizität von $D_M + D_M^*$ (vgl. Lemma 2.1.14) folgt, daß μ eine C^∞ -Form sein muß. Damit liegt μ im Definitionsbereich von $d_{M,k}$. Daraus folgt die Behauptung. ■

2.1.18 Lemma: Sei M eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann gilt mit \widetilde{M} wie in Theorem 2.1.11

$$\Omega^k(\widetilde{M})\Big|_M = \Omega^k(M). \quad (2.1.157)$$

Beweis: Es ist nur zu zeigen, daß

$$\Omega^k(M) \subset \Omega^k(\widetilde{M})\Big|_M \quad (2.1.158)$$

gilt.

Sei $\omega \in \Omega^k(M)$. Nach der Definition von glatten Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten mit Rand gibt es einen Kragen

$$U \simeq (-1, 1) \times N \quad (2.1.159)$$

um N in \widetilde{M} , so daß $\omega|_{U \cap M}$ zu $\eta \in \Omega^k(U)$ fortgesetzt werden kann. Wir nehmen an, daß

$$U \cap M \simeq (-1, 0] \times N \quad (2.1.160)$$

gilt. Wähle eine Funktion

$$\varphi \in C^\infty(-1, 1), \quad (2.1.161)$$

so daß

$$\varphi|_{(-1, 0]} \equiv 1 \quad (2.1.162)$$

und

$$\varphi|_{[\frac{1}{2}, 1)} \equiv 0 \quad (2.1.163)$$

gilt. Setze dann

$$\vartheta := \varphi \circ \pi_1 \cdot \pi_2^* \eta, \quad (2.1.164)$$

wobei

$$\pi_1 : U \rightarrow (-1, 1) \quad \text{und} \quad \pi_2 : U \rightarrow N \quad (2.1.165)$$

die beiden kanonischen orthogonalen Projektionen sind.

Durch

$$\widetilde{\omega}|_M := \omega, \quad \widetilde{\omega}|_U := \vartheta \quad \text{und} \quad \widetilde{\omega}|_{\widetilde{M} \setminus \{M \cup U\}} := 0 \quad (2.1.166)$$

wird ein $\widetilde{\omega} \in \Omega^k(\widetilde{M})$ definiert, dessen Einschränkung auf M gleich ω ist. ■

2.1.19 Lemma: Sei M eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann gilt

$$\Omega(M) \subset \mathcal{D}_M. \quad (2.1.167)$$

Beweis: Auf \widetilde{M} wie in Theorem 2.1.11 sei $\widetilde{\omega} \in \Omega(\widetilde{M})$ gegeben. Dann zerfällt $\widetilde{\omega}$ in

$$\widetilde{\omega} = \widetilde{\omega}^+ + \widetilde{\omega}^- \in \left(\mathcal{D}_{\widetilde{M}} \cap H^+\right) \oplus \left(\mathcal{D}_{\widetilde{M}} \cap H^-\right). \quad (2.1.168)$$

Folglich gilt mit Theorem 2.1.11

$$\widetilde{\omega}|_M = \widetilde{\omega}^+|_M + \widetilde{\omega}^-|_M \in \mathcal{D}_M + \mathcal{D}(d_{M,min}) = \mathcal{D}_M. \quad (2.1.169)$$

Nun kann aber jedes $\omega \in \Omega(M)$ zu einem $\widetilde{\omega} \in \Omega(\widetilde{M})$ fortgesetzt werden, wie in Lemma 2.1.18 gezeigt wurde. Daher folgt die Behauptung. ■

2.1.20 Definition: Sei M eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand. Setze

$$\bar{d}_{M,k} := D_{M,k}|_{\Omega^k(M)}. \quad (2.1.170)$$

Dann gilt wegen Lemma 2.1.19

$$\mathcal{D}(\bar{d}_{M,k}) = \Omega^k(M) \quad (2.1.171)$$

und

$$d_{M,k} \subset \bar{d}_{M,k} \subset D_{M,k}. \quad (2.1.172)$$

Definiere

$$\bar{d}_M := \bigoplus_k \bar{d}_{M,k}. \quad (2.1.173)$$

Mit \bar{d}_M bzw. $\bar{d}_{M,k}$ wird die Einschränkung von $d_{M,min}^*$ auf $\Omega(M)$ bzw. auf $\Omega^{k+1}(M)$ bezeichnet.

2.1.21 Lemma: Sei M eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand. Es gilt

$$\bar{d}_{M,k,min} = d_{M,k,max}. \quad (2.1.174)$$

Beweis: Da

$$\bar{d}_{M,k} \subset D_{M,k} \quad (2.1.175)$$

gilt, folgt

$$\bar{d}_{M,k,min} \subset D_{M,k}. \quad (2.1.176)$$

Sei $\omega \in \mathcal{D}_{M,k}$ gegeben. Mit \widetilde{M} und β wie in Theorem 2.1.11 gilt dann mit Korollar 2.1.10

$$\tilde{\omega} := \beta\omega \in \mathcal{D} \left(d_{\widetilde{M},k,max} \right) = \mathcal{D} \left(d_{\widetilde{M},k,min} \right). \quad (2.1.177)$$

Daher gibt es eine Folge $(\tilde{\omega}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega^k(\widetilde{M})$, die bezüglich der Graphennorm von $D_{\widetilde{M}}$ gegen $\tilde{\omega}$ konvergiert. Dann konvergiert

$$(\tilde{\omega}_n|_M)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega^k(M) \quad (2.1.178)$$

bezüglich der Graphennorm von D_M gegen ω . Daher gilt $\omega \in \mathcal{D}(\bar{d}_{M,k,min})$. ■

2.1.22 Satz: Sei M eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit (eventuell mit Rand) der Dimension m und

$$f \in C^\infty(M, M) \quad (2.1.179)$$

eine Involution. Dann gilt für $\omega \in \mathcal{D}_{M,k}$

$$f^*D_{M,k}\omega = D_{M,k}f^*\omega. \quad (2.1.180)$$

Beweis: Sei $\omega \in \mathcal{D}_{M,k}$ gegeben. Dann gibt es aufgrund von Lemma 2.1.21 eine Folge $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega^k(M)$ mit

$$\omega_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} \omega \quad (2.1.181)$$

und

$$\bar{d}_{M,k}\omega_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} D_{M,k}\omega. \quad (2.1.182)$$

Wegen

$$f^*\omega_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} f^*\omega \quad (2.1.183)$$

und

$$\bar{d}_{M,k}f^*\omega_n = f^*\bar{d}_{M,k}\omega_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} f^*D_{M,k}\omega \quad (2.1.184)$$

gilt $f^*\omega \in \mathcal{D}_{M,k}$. Nun gilt

$$D_{M,k}f^*\omega = L^2\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{d}_{M,k}f^*\omega_n = f^*D_{M,k}\omega. \quad (2.1.185)$$

Damit folgt die Behauptung. ■

2.1.23 Korollar: Seien M und f wie in Satz 2.1.22 gegeben. Falls f^* zusätzlich selbstadjungiert ist, gilt für $\omega \in \mathcal{D}_{M,k}^*$

$$f^* D_{M,k}^* \omega = D_{M,k}^* f^* \omega. \quad (2.1.186)$$

Beweis: Die Behauptung folgt aus der Tatsache, daß

$$D_{M,k}^* = (-1)^{mk+1} \star d_{M,m-k-1,min} \star \quad (2.1.187)$$

gilt, wie in Lemma 2.1.5 gezeigt wird. Es gilt dann nämlich nach Satz 1.2.6 bzw. Satz 1.2.7 (je nachdem, ob f lokal orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend ist)

$$\begin{aligned} f^* D_{M,k}^* \omega &= (-1)^{mk+1} f^* \star d_{M,m-k-1,min} \star \omega = \\ &= \pm (-1)^{mk+1} \star f^* d_{M,m-k-1,min} \star \omega = \\ &= \pm (-1)^{mk+1} \star d_{M,m-k-1,min} f^* \star \omega = \\ &= (-1)^{mk+1} \star d_{M,m-k-1,min} \star f^* \omega = D_{M,k}^* f^* \omega, \end{aligned} \quad (2.1.188)$$

weil für $\omega \in \mathcal{D}(d_{M,min})$ auch $f^* \omega \in \mathcal{D}(d_{M,min})$ gilt. Das sieht man analog zum Beweis von Satz 2.1.22, wenn man beachtet, daß die auftretende Folge nicht in $\Omega^k(M)$, sondern in $\Omega_0^k(\overset{\circ}{M})$ liegt. ■

2.2 Die äußere Ableitung auf Sobolevräumen

2.2.1 Lemma: Seien s und l beliebige reelle Zahlen. Dann ist $d_{M,k}$ in

$$H^s(\wedge^k T^* M) \rightarrow H^l(\wedge^{k+1} T^* M) \quad (2.2.1)$$

abschließbar, wobei M eine geschlossene orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit ist.

Beweis: Sei $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega^k(M)$ eine Folge, die in $H^s(\wedge^k T^*M)$ gegen 0 konvergiert. Da $d_{M,k}$ ein Differentialoperator erster Ordnung ist, ist

$$d_{M,k} : (\Omega^k(M), \|\cdot\|_{H^s}) \rightarrow (\Omega^{k+1}(M), \|\cdot\|_{H^{s-1}}) \quad (2.2.2)$$

stetig. Damit gilt

$$0 = d_{M,k} H^s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = H^{s-1}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} d_{M,k} \omega_n. \quad (2.2.3)$$

Falls nun $d_{M,k} \omega_n$ in $H^l(\wedge^{k+1} T^*M)$ konvergiert — was insbesondere für

$$l \leq s - 1 \quad (2.2.4)$$

richtig ist — muß nach Lemma 1.3.5 der Grenzwert gleich dem Grenzwert in $H^{s-1}(\wedge^{k+1} T^*M)$ sein. Damit erhalten wir — falls der Grenzwert existiert —

$$H^l\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} d_{M,k} \omega_n = 0. \quad (2.2.5)$$

Der Abschluß des Graphen von $d_{M,k}$ in

$$H^s(\wedge^k T^*M) \times H^l(\wedge^{k+1} T^*M) \quad (2.2.6)$$

ist also wieder der Graph eines Operators. Damit ist $d_{M,k}$ bezüglich dieser Normen abschließbar. ■

2.2.2 Definition: Sei M eine geschlossene orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für $s, l \in \mathbb{R}$ wird der Abschluß von $d_{M,k}$ in

$$H^s(\wedge^k T^*M) \rightarrow H^l(\wedge^{k+1} T^*M) \quad (2.2.7)$$

mit

$$D_{M,k}^{s,l} : \mathcal{D}_{M,k}^{s,l} := \mathcal{D}(D_{M,k}^{s,l}) \rightarrow H^l(\wedge^{k+1} T^*M) \quad (2.2.8)$$

bezeichnet. Wir setzen

$$D_M^{s,l} := \bigoplus_k D_{M,k}^{s,l} \quad \text{und} \quad \mathcal{D}_M^{s,l} := \mathcal{D}(D_M^{s,l}). \quad (2.2.9)$$

Falls $s = l$ gilt, wird $D_M^{s,l}$ der Einfachheit halber mit D_M^s bezeichnet. Analog dazu setzen wir auch

$$\mathcal{D}_M^s := \mathcal{D}_M^{s,s}, \quad D_{M,k}^s := D_{M,k}^{s,s} \quad \text{und} \quad \mathcal{D}_{M,k}^s := \mathcal{D}_{M,k}^{s,s}. \quad (2.2.10)$$

$$(\mathcal{D}_{M,k}^s, \mathcal{D}_{M,k}^s) \quad (2.2.11)$$

ist ein Hilbertkomplex. Dies kann analog zum ersten Teil des Beweises von Satz 2.1.12 gezeigt werden.

2.2.3 Satz: Sei M eine geschlossene orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist d_M^t unabhängig davon, in welchem Sobolevraum $H^s(\wedge T^*M)$ mit $s \in \mathbb{R}$ der Operator d_M transponiert wird.

Beweis: Betrachte für $s \in \mathbb{R}$ das Skalarprodukt

$$(\mu | \nu)_{H^s} = ((1 + \Delta_{D_M})^s \mu | \nu)_{L^2} \quad (2.2.12)$$

für $\mu, \nu \in \Omega(M)$. Dieses Skalarprodukt kann durch Stetigkeit zu einem Skalarprodukt auf $H^s(\wedge T^*M)$ fortgesetzt werden. Man beachte, daß Δ_{D_M} den Laplaceoperator bezüglich $(\mathcal{D}_M, \mathcal{D}_M)$ bezeichnet. Da bald noch andere Laplaceoperatoren auftreten werden, sind wir für den Moment zugunsten einer einheitlichen Schreibweise von der vorher eingeführten Notation Δ_M abgewichen. Die hier verwendete Notation ist allerdings so suggestiv, daß Mißverständnisse wohl ausgeschlossen werden können. Auf $H^s(\wedge T^*M)$ gibt es zwar keine kanonische Norm und damit auch kein kanonisches Skalarprodukt, aber alle Normen sind äquivalent, so daß wir ohne Einschränkung dieses spezielle Skalarprodukt auswählen dürfen.

Für $\omega \in \Omega(M)$ gilt

$$(1 + \Delta_M) d_M \omega = d_M (1 + \Delta_M) \omega, \quad (2.2.13)$$

wie man aus der Definition von Δ_M sieht. Wegen

$$1 + \Delta_M \geq 1 \quad (2.2.14)$$

ist $(1 + \Delta_M)^{-1}$ ein beschränkter selbstadjungierter Operator, und es gilt

$$\text{spec}(1 + \Delta_M)^{-1} \subset [0, 1]. \quad (2.2.15)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} & (1 + \Delta_M)^{-1} d_M \omega = \\ & = (1 + \Delta_M)^{-1} d_M (1 + \Delta_M) (1 + \Delta_M)^{-1} \omega = \\ & = (1 + \Delta_M)^{-1} (1 + \Delta_M) d_M (1 + \Delta_M)^{-1} \omega = \\ & = d_M (1 + \Delta_M)^{-1} \omega. \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

Für $s \geq 0$ gibt es eine Folge reellwertiger Polynome $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $[0, 1]$, die

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^s \quad (2.2.17)$$

gleichmäßig approximiert. Aus Formel (2.2.16) folgt

$$d_M P_n \left((1 + \Delta_M)^{-1} \right) \omega = P_n \left((1 + \Delta_M)^{-1} \right) d_M \omega. \quad (2.2.18)$$

Mit dem Spektralsatz in der Formulierung von Theorem 8.5 aus REED / SIMON [12] gilt

$$P_n \left((1 + \Delta_M)^{-1} \right) \omega \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} f \left((1 + \Delta_M)^{-1} \right) \omega = (1 + \Delta_M)^{-s} \omega. \quad (2.2.19)$$

Wegen

$$\text{spec} (1 + \Delta_M)^{-1} \subset [0, 1] \quad (2.2.20)$$

genügt es, f auf $[0, 1]$ zu erklären.

Für $\omega, \mu \in \Omega(M)$ folgt damit

$$\begin{aligned} & \left((1 + \Delta_M)^{-s} d_M \omega \mid \mu \right)_{L^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(P_n \left((1 + \Delta_M)^{-1} \right) d_M \omega \mid \mu \right)_{L^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(d_M P_n \left((1 + \Delta_M)^{-1} \right) \omega \mid \mu \right)_{L^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(P_n \left((1 + \Delta_M)^{-1} \right) \omega \mid d_M^{t_{L^2}} \mu \right)_{L^2} = \\ &= \left(f \left((1 + \Delta_M)^{-1} \right) \omega \mid d_M^{t_{L^2}} \mu \right)_{L^2} = \\ &= \left(d_M (1 + \Delta_M)^{-s} \omega \mid \mu \right)_{L^2}. \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

Wir wählen nun ein $l \in \mathbb{N}$ mit $l \geq s$. Dann gilt mit Formel (2.2.13) und Formel (2.2.21) für $\omega, \mu \in \Omega(M)$

$$\begin{aligned} & \left((1 + \Delta_M)^s d_M \omega \mid \mu \right)_{L^2} = \\ &= \left((1 + \Delta_M)^{s-l} (1 + \Delta_M)^l d_M \omega \mid \mu \right)_{L^2} = \\ &= \left((1 + \Delta_M)^{s-l} d_M (1 + \Delta_M)^l \omega \mid \mu \right)_{L^2} = \\ &= \left(d_M (1 + \Delta_M)^{s-l} (1 + \Delta_M)^l \omega \mid \mu \right)_{L^2} = \\ &= \left(d_M (1 + \Delta_M)^s \omega \mid \mu \right)_{L^2}. \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

Weil $\Omega(M) \subset L^2(\wedge T^*M)$ dicht liegt, gilt für jedes $s \in \mathbb{R}$ und jedes $\omega \in \Omega(M)$

$$(1 + \Delta_M)^s d_M \omega = d_M (1 + \Delta_M)^s \omega. \quad (2.2.23)$$

Für $s \in \mathbb{R}$, $\omega, \eta \in \Omega(M)$ folgt dann

$$\begin{aligned} & (d_M \omega \mid \mu)_{H^s} = \\ & = \left((1 + \Delta_{D_M})^s d_M \omega \mid \mu \right)_{L^2} = \\ & = \left(d_M (1 + \Delta_{D_M})^s \omega \mid \mu \right)_{L^2} = \\ & = \left((1 + \Delta_{D_M})^s \omega \mid d_M^{t_{L^2}} \mu \right)_{L^2} = \\ & = \left(\omega \mid d_M^{t_{L^2}} \mu \right)_{H^s}. \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

Das heißt, daß

$$d_M^{t_{L^2}} = d_M^{t_{H^s}} \quad (2.2.25)$$

gilt. Daraus folgt die Behauptung. ■

2.2.4 Satz: Unter den Voraussetzungen von Satz 2.2.3 ist $(\mathcal{D}_M^s, \mathcal{D}_M^s)$ ein Fredholmkomplex.

Beweis: Wegen Formel (2.2.25) gilt

$$\Delta_{D_M} \big|_{\Omega(M)} = \Delta_{D_M^s} \big|_{\Omega(M)} \quad (2.2.26)$$

und damit

$$\sigma_{\Delta_{D_M}} = \sigma_{\Delta_{D_M^s}}, \quad (2.2.27)$$

wobei $\Delta_{D_M^s}$ den Laplaceoperator bezüglich $(\mathcal{D}_M^s, \mathcal{D}_M^s)$ bezeichnet. $\Delta_{D_M^s}$ ist also elliptisch. Damit ist $\mathcal{H}_{D_M^s}$ endlichdimensional, wie man analog zum ersten Teil des Beweises von Satz 2.1.15 sieht. Darüber hinaus sieht man, daß sogar

$$\mathcal{H}_{D_M^s} \simeq \mathcal{H}_{D_M} \quad (2.2.28)$$

gelten muß. ■

2.2.5 Lemma: Sei M eine geschlossene orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension m . Für $\omega \in H^s(\wedge T^*M)$ mit $s \in \mathbb{R}$ gilt genau dann

$$L^2(\wedge T^*M) \subset \mathcal{D}_M^s, \quad (2.2.29)$$

wenn $s \leq -1$ ist.

Beweis: Da D_M^s ein Differentialoperator erster Ordnung ist, ist die Aussage für $s \leq -1$ offensichtlich.

Sei nun $s > -1$ gegeben. Da $(D_{M,k}^s)^*$ ein abgeschlossener Operator ist, folgt aus Satz 2.2.3

$$(-1)^{mk+1} \star D_{M,m-k-1}^s \star \subset (D_{M,k}^s)^*. \quad (2.2.30)$$

Falls

$$L^2(\wedge T^*M) \subset \mathcal{D}_M^s \quad (2.2.31)$$

gilt, gilt also auch

$$L^2(\wedge T^*M) \subset \mathcal{D}((D_M^s)^*). \quad (2.2.32)$$

Für $\nu \in L^2(\wedge T^*M)$ würde also

$$(D_M^s + (D_M^s)^*) \nu \in H^s(\wedge T^*M) \quad (2.2.33)$$

folgen. Da $D_M^s + (D_M^s)^*$ elliptisch ist, folgt daraus

$$\nu \in H^{s+1}(\wedge T^*M). \quad (2.2.34)$$

Es gilt aber

$$L^2(\wedge T^*M) \not\subset H^{s+1}(\wedge T^*M), \quad (2.2.35)$$

da $s + 1 > 0$ gilt. Folglich gilt

$$L^2(\wedge T^*M) \not\subset \mathcal{D}_M^s. \quad (2.2.36)$$

■

2.2.6 Lemma: Sei M eine geschlossene orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\omega \in H^s(\wedge T^*M)$ mit $s \in \mathbb{R}$. Gemäß der Hodgezerlegung bezüglich (\mathcal{D}_M^s, D_M^s) kann ω in

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 \in \widehat{\mathcal{H}}_{D_M^s} \oplus \text{im } D_M^s \oplus \text{im } (D_M^s)^* \quad (2.2.37)$$

zerlegt werden. ω liegt genau dann in \mathcal{D}_M^s , wenn ω_2 in $H^{s+1}(\wedge T^*M)$ liegt.

Beweis: Für $\omega \in \mathcal{D}_M^s$ gilt $\omega_2 \in \mathcal{D}_M^s \cap \text{im}(\mathcal{D}_M^s)^*$. Es gilt

$$(\mathcal{D}_M^s + (\mathcal{D}_M^s)^*) \omega_2 = \mathcal{D}_M^s \omega_2 \in \mathcal{H}^s(\wedge T^*M). \quad (2.2.38)$$

Da $\mathcal{D}_M^s + (\mathcal{D}_M^s)^*$ elliptisch und von der Ordnung 1 ist, folgt

$$\omega_2 \in \mathcal{H}^{s+1}(\wedge T^*M). \quad (2.2.39)$$

Andererseits gilt für $\omega_2 \in \mathcal{H}^{s+1}(\wedge T^*M)$, daß ω_2 in \mathcal{D}_M^s liegt, da \mathcal{D}_M^s ein Differentialoperator erster Ordnung ist. Da ω_0 und ω_1 in \mathcal{D}_M^s liegen, folgt $\omega \in \mathcal{D}_M^s$. ■

2.2.7 Lemma: Sei M eine geschlossene orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für $s, l \geq 0$ gilt

$$\mathcal{D}_M^{s,l} \subset \mathcal{D}_M|_{\mathcal{D}_M \cap \mathcal{H}^s(\wedge T^*M)}. \quad (2.2.40)$$

Beweis: Da

$$\mathcal{D}_M^{s,l} \subset \mathcal{H}^s(\wedge T^*M) \quad (2.2.41)$$

gilt und Konvergenz in \mathcal{H}^q Konvergenz in L^2 impliziert, falls $q \geq 0$ gilt, ist die Aussage offensichtlich. ■

2.2.8 Lemma: Sei M wie in Lemma 2.2.7. Für $s \geq 1$ gilt

$$\mathcal{D}_M^{s,s-1} = \mathcal{D}_M|_{\mathcal{H}^s(\wedge T^*M)}. \quad (2.2.42)$$

Beweis: Die Aussage ist offensichtlich, da \mathcal{D}_M ein Differentialoperator erster Ordnung ist und für einen Differentialoperator l -ter Ordnung

$$P \in \text{Diff}_l(E, F) \quad (2.2.43)$$

allgemein gilt, daß $P : \mathcal{H}^s(E) \rightarrow \mathcal{H}^{s-l}(F)$ stetig ist (vgl. Lemma 1.3.4). Dabei seien E und F Hermitesche Vektorraumbündel über M . ■

2.2.9 Lemma: Sei M eine geschlossene orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für $s \geq 1$ gilt dann

$$\operatorname{im} D_{M,k}^{s,s-1} = \operatorname{im} D_{M,k} \cap H^{s-1}(\wedge^{k+1} T^* M). \quad (2.2.44)$$

Beweis: Die Aussage folgt analog zum Beweis von Lemma 2.1.17 aus der elliptischen Regularität von $D_M + D_M^*$. ■

2.2.10 Lemma: Sei M eine geschlossene orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$\operatorname{im} D_{M,k}^s \cap L^2(\wedge^{k+1} T^* M) \subset \operatorname{im} D_{M,k}. \quad (2.2.45)$$

Beweis: Für $s \geq 1$ ist die Aussage offensichtlich, da

$$\operatorname{im} D_M^s \subset H^{s-1}(\wedge T^* M) \subset L^2(\wedge T^* M) \quad (2.2.46)$$

gilt. Für $s < 1$ kann der Beweis analog zum Beweis von Lemma 2.1.17 geführt werden, indem die elliptische Regularität von $D_M^s + (D_M^s)^*$ ausgenutzt wird. ■

2.3 Der Spursatz von Paquet

Sei M eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand und

$$i : \partial M \hookrightarrow M \quad (2.3.1)$$

die kanonische Einbettung. Dann induziert i einen linearen Spuroperator

$$i^* : \Omega(M) \rightarrow \Omega(\partial M). \quad (2.3.2)$$

Dieser Spuroperator kann im allgemeinen *nicht* zu

$$i^* : L^2(\wedge T^* M) \rightarrow L^2(\wedge T^* \partial M) \quad (2.3.3)$$

fortgesetzt werden, da ∂M eine $L^2(\wedge T^* M)$ -Nullmenge ist. Es ist nun zu prüfen, ob und in welcher Form i^* fortgesetzt werden kann.

Wir werden im folgenden die Bezeichnung i für die kanonische Einbettung des Randes einer Mannigfaltigkeit in die Mannigfaltigkeit selbst beibehalten, ohne jeweils explizit darauf hinzuweisen auf welche Mannigfaltigkeit sich die Einbettung bezieht, falls dies aus dem Zusammenhang klar ersichtlich ist.

In der Arbeit von PAQUET [11], Theorem 1.9 wird ein interessanter Spursatz vorgestellt, der für diese Arbeit sehr nützlich ist. Hier wird nämlich der Definitionsbereich von i^* gerade auf \mathcal{D}_M erweitert.

2.3.1 Spursatz von Paquet: Sei M eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand.

$$i^* : \Omega(M) \rightarrow \Omega(\partial M) \quad (2.3.4)$$

kann eindeutig zu einer stetigen und surjektiven linearen Abbildung

$$i^* : (\mathcal{D}_M, \|\cdot\|_{\mathcal{D}_M}) \rightarrow \left(\mathcal{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2}}, \|\cdot\|_{\mathcal{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2}}} \right) \quad (2.3.5)$$

fortgesetzt werden. $\|\cdot\|_{\mathcal{D}_M}$ bezeichnet dabei die Graphennorm von \mathcal{D}_M und $\|\cdot\|_{\mathcal{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2}}}$ die Graphennorm von $\mathcal{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2}}$.

Beweis: Der Beweis dieses Satzes ist relativ aufwendig und sehr technisch. Wir werden ihn daher in einzelne Schritte unterteilen.

Als \mathbb{R}_-^n betrachten wir

$$\mathbb{R}_-^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq 0\}. \quad (2.3.6)$$

Dabei sei x von der Form

$$x = \sum_{l=1}^n x_l e_l, \quad (2.3.7)$$

wobei $\{e_1, \dots, e_n\}$ die Standardbasis des \mathbb{R}^n ist. Den Rand von \mathbb{R}_-^n identifizieren wir in kanonischer Weise mit \mathbb{R}^{n-1} . Für eine Funktion u auf \mathbb{R}_-^n wird — falls sie definiert ist — die Fouriertransformierte in der zweiten bis n -ten Variablen mit $\mathcal{F}(u)$ bezeichnet. Mit I, J etc. werden wir geordnete Multiindizes in $\{1, \dots, n\}$ bezeichnen, das heißt geordnete Teilmengen

$$I = \{I_1, \dots, I_k\} \subset \{1, \dots, n\}. \quad (2.3.8)$$

Die Schreibweise dx^I steht für $dx_{I_1} \wedge \dots \wedge dx_{I_k}$. Im Gegensatz zu der in Abschnitt 2.1 eingeführten Notation werden wir in diesem Beweis mit d bzw. d_k die äußere Ableitung (der Stufe k) auf $\Omega(\mathbb{R}_-^n)$ bzw. $\Omega^k(\mathbb{R}_-^n)$ bezeichnen. Entsprechend stehen $d_{\mathbb{R}^{n-1}}$ und $d_{\mathbb{R}^{n-1},k}$ für die äußere Ableitung (der Stufe k) auf $\Omega(\mathbb{R}^{n-1})$. d mit einem Index, wie zum Beispiel M versehen steht aber weiterhin für die äußere Ableitung auf glatten Formen ω auf M mit Träger im Inneren von M .

1. Schritt: Für jedes $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}_-^n)$ gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|i^*u\|_{H^{-\frac{1}{2}}}^2 \leq \\ & \leq \|u\|_{L^2}^2 + \int_{\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}} \int_{x_1}^0 \left| \mathcal{F} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right) (t, \xi) \right|^2 dt |x_1| e^{x_1(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}} dx_1 \otimes d\xi. \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Dabei ist zu beachten, daß sich die $H^{-\frac{1}{2}}$ -Norm auf der linken Seite der Ungleichung auf \mathbb{R}^{n-1} bezieht, wogegen sich die L^2 -Norm auf der rechten Seite auf \mathbb{R}_-^n bezieht.

Beweis: Für $a \leq 0$ und

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \text{ mit } f' \in L_{loc}^2(\mathbb{R}) \quad (2.3.10)$$

gilt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} (f(0) - f(a))^2 &= \left(\int_a^0 f'(t) dt \right)^2 = \\ &\leq \int_a^0 1^2 dt \cdot \int_a^0 (f'(t))^2 dt = |a| \int_a^0 (f'(t))^2 dt. \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$(b-a)^2 \geq \frac{1}{2}a^2 - b^2, \quad (2.3.12)$$

weil

$$0 \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}a - \sqrt{2}b \right)^2 = \frac{1}{2}a^2 - 2ab + 2b^2 \quad (2.3.13)$$

gilt. Für $a > 0$ gilt

$$\int_{-\infty}^0 e^{at} dt = \frac{1}{a} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^0 te^{at} dt = -\frac{1}{a^2}, \quad (2.3.14)$$

wie sich leicht durch partielle Integration nachprüfen läßt.

Mit den Formeln (2.3.11), (2.3.12), (2.3.14) und dem Satz von Fubini erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \|i^* u\|_{\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}}^2 &= \frac{1}{2} \|u(0, \cdot)\|_{\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}}^2 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{|\mathcal{F}(u)(0, \xi)|^2}{(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}} d\xi = \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}} |\mathcal{F}(u)(0, \xi)|^2 e^{x_1(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}} dx_1 \otimes d\xi \leq \\
&\leq \int_{\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}} \left(|\mathcal{F}(u)(x_1, \xi)|^2 + |\mathcal{F}(u)(x_1, \xi) - \mathcal{F}(u)(0, \xi)|^2 \right) \cdot \\
&\quad \cdot e^{x_1(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}} dx_1 \otimes d\xi \leq \\
&\leq \int_{\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}} |\mathcal{F}(u)(x_1, \xi)|^2 dx_1 \otimes d\xi + \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}} \int_{x_1}^0 \left| \mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)(t, \xi) \right|^2 dt |x_1| e^{x_1(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}} dx_1 \otimes d\xi = \\
&= \|u\|_{L^2}^2 + \int_{\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}} \int_{x_1}^0 \left| \mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)(t, \xi) \right|^2 dt |x_1| e^{x_1(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}} dx_1 \otimes d\xi.
\end{aligned} \tag{2.3.15}$$

□

2. Schritt: Es gibt eine Konstante $C > 0$, so daß für jedes $\omega \in \Omega_0^k(\mathbb{R}_-^n)$

$$\|i^* \omega\|_{\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}} \leq C (\|\omega\|_{L^2} + \|d_k \omega\|_{L^2}) \tag{2.3.16}$$

gilt. C hängt nicht von ω oder k ab.

Beweis: Da wir ω in der Form

$$\omega = \sum_{|I|=k} \omega_I dx^I \tag{2.3.17}$$

mit $\omega_I \in C_0^\infty(\mathbb{R}_-^n)$ schreiben können, gilt

$$\omega = \omega_0 + dx_1 \wedge \omega_1 \tag{2.3.18}$$

mit

$$\omega_0 := \sum_{1 \notin I} \omega_I dx^I \in \Omega_0^k(\mathbb{R}_-^n) \tag{2.3.19}$$

und

$$\omega_1 := \sum_{I \in I} \omega_I dx^{I \setminus \{1\}} \in \Omega_0^{k-1}(\mathbb{R}_-^n). \quad (2.3.20)$$

Mit einer geeigneten Konstante \tilde{C} , die weder von ω noch von k abhängt, gilt dann

$$\int_{-\infty}^0 \|\mathrm{d}_{\mathbb{R}^{n-1}, k-1} \omega_1(x_1, \cdot)\|_{\mathbb{H}^{-1}}^2 dx_1 \leq \tilde{C} \int_{-\infty}^0 \|\omega_1(x_1, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2}^2 dx_1 = \tilde{C} \|\omega\|_{\mathbb{L}^2}^2. \quad (2.3.21)$$

Daraus folgt mit Formel (2.3.12), Formel (2.3.14) und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \|\mathrm{d}_k \omega\|_{\mathbb{L}^2}^2 &= \int_{-\infty}^0 \|\mathrm{d}_{\mathbb{R}^{n-1}, k} \omega_0(x_1, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2}^2 dx_1 + \\ &\quad + \int_{-\infty}^0 \left\| \frac{\partial \omega_0}{\partial x_1}(x_1, \cdot) - \mathrm{d}_{\mathbb{R}^{n-1}, k-1} \omega_1(x_1, \cdot) \right\|_{\mathbb{L}^2}^2 dx_1 \geq \\ &\geq \int_{-\infty}^0 \left\| \frac{\partial \omega_0}{\partial x_1}(x_1, \cdot) - \mathrm{d}_{\mathbb{R}^{n-1}, k-1} \omega_1(x_1, \cdot) \right\|_{\mathbb{L}^2}^2 dx_1 \geq \\ &\geq \int_{-\infty}^0 \left\| \frac{\partial \omega_0}{\partial x_1}(x_1, \cdot) - \mathrm{d}_{\mathbb{R}^{n-1}, k-1} \omega_1(x_1, \cdot) \right\|_{\mathbb{H}^{-1}}^2 dx_1 \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \left\| \frac{\partial \omega_0}{\partial x_1}(x_1, \cdot) \right\|_{\mathbb{H}^{-1}}^2 dx_1 - \int_{-\infty}^0 \|\mathrm{d}_{\mathbb{R}^{n-1}, k-1} \omega_1(x_1, \cdot)\|_{\mathbb{H}^{-1}}^2 dx_1 \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \left\| \frac{\partial \omega_0}{\partial x_1}(x_1, \cdot) \right\|_{\mathbb{H}^{-1}}^2 dx_1 - \tilde{C} \|\omega\|_{\mathbb{L}^2}^2 = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left| \mathcal{F} \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial x_1} \right) (x_1, \xi) \right|^2 \frac{1}{1 + |\xi|^2} d\xi dx_1 - \tilde{C} \|\omega\|_{\mathbb{L}^2}^2 = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^0 \left| \mathcal{F} \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial x_1} \right) (t, \xi) \right|^2 dt |x_1| e^{x_1(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}} dx_1 \otimes d\xi - \tilde{C} \|\omega\|_{\mathbb{L}^2}^2 \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}} \int_{x_1}^0 \left| \mathcal{F} \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial x_1} \right) (t, \xi) \right|^2 dt |x_1| e^{x_1(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}} dx_1 \otimes d\xi - \tilde{C} \|\omega\|_{\mathbb{L}^2}^2. \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

Mit dem Ergebnis von Schritt 1 folgt dann daraus

$$\begin{aligned} \|i^*\omega\|_{\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}}^2 &\leq (4\tilde{C} + 2) \|\omega\|_{\mathbb{L}^2}^2 + 4 \|d_k\omega\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq \\ &\leq (4\tilde{C} + 4) \left(\|\omega\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \|d_k\omega\|_{\mathbb{L}^2}^2 \right). \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

Wir erhalten so die gewünschte Aussage mit

$$C := 2\sqrt{\tilde{C} + 1}. \quad (2.3.24)$$

□

3. Schritt: Unter den Voraussetzungen von Schritt 2 gilt

$$\|d_{\mathbb{R}^{n-1},k}i^*\omega\|_{\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}} \leq C (\|\omega\|_{\mathbb{L}^2} + \|d_k\omega\|_{\mathbb{L}^2}). \quad (2.3.25)$$

Beweis: Wegen

$$d_{\mathbb{R}^{n-1},k+1} \circ d_{\mathbb{R}^{n-1},k} = 0 \quad (2.3.26)$$

gilt

$$\begin{aligned} \|d_{\mathbb{R}^{n-1},k}i^*\omega\|_{\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}} &= \|i^*d_k\omega\|_{\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}} \leq \\ &\leq C \|d_k\omega\|_{\mathbb{L}^2} \leq C (\|\omega\|_{\mathbb{L}^2} + \|d_k\omega\|_{\mathbb{L}^2}). \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

□

4. Schritt: Sei M eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann gibt es eine Konstante $\tilde{C} > 0$, so daß für jedes $\omega \in \Omega^k(M)$

$$\|i^*\omega\|_{\mathbb{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2}}} \leq \tilde{C} \|\omega\|_{\mathbb{D}_M} \quad (2.3.28)$$

gilt. \tilde{C} darf von M , nicht aber von ω oder k abhängen.

Beweis: Wir wählen einen endlichen C^∞ -Atlas

$$\mathcal{A} = (U_a, \varphi_a)_{a \in A} \quad (2.3.29)$$

mit präkompakten Karten von M .

$$(g_a)_{a \in A} \subset C^\infty(M) \quad (2.3.30)$$

sei eine zu \mathcal{A} subordinierte Zerlegung der Eins. Dann gilt für $\omega \in \Omega^k(M)$

$$\omega = \sum_{a \in A} g_a \cdot \omega. \quad (2.3.31)$$

Da \mathcal{A} endlich ist, gilt

$$\tilde{C} := \max_{a \in A} (\|g_a\|_{L^\infty} + \|\bar{d}_{M,0}g_a\|_{L^\infty}) < \infty. \quad (2.3.32)$$

Damit erhalten wir mit der Konstante C aus Schritt 2

$$\begin{aligned} \|i^*\omega\|_{D_{\partial M}^{-\frac{1}{2}}} &\leq \sum_{a \in A} \|i^*(g_a \cdot \omega)\|_{D_{\partial M}^{-\frac{1}{2}}} \leq \\ &\leq 2C \sum_{a \in A} \|g_a \cdot \omega\|_{D_M} \leq \\ &\leq 2C \sum_{a \in A} (\|g_a \cdot \omega\|_{L^2} + \|\bar{d}_{M,0}g_a \wedge \omega\|_{L^2} + \|g_a \cdot \bar{d}_{M,k}\omega\|_{L^2}) \leq \\ &\leq 2C \cdot \tilde{C} \sum_{a \in A} (2\|\omega\|_{L^2} + \|\bar{d}_{M,k}\omega\|_{L^2}) \leq \\ &\leq 4C \cdot \tilde{C} \sum_{a \in A} \|\omega\|_{D_M} = 4|A| \cdot C \cdot \tilde{C} \|\omega\|_{D_M}, \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

weil jedes $g_a \cdot \omega$ in einem Koordinatensystem dargestellt werden kann und daher die lokalen Aussagen der Schritte 2 und 3 gelten. Daher können wir

$$\tilde{C} := 4|A| \cdot C \cdot \tilde{C} \quad (2.3.34)$$

setzen. □

5. Schritt: Sei $\chi \in \Omega_0^k(\mathbb{R}^{n-1})$. Dann gibt es ein $\omega \in \Omega_0^k(\mathbb{R}_-^n)$ mit

$$i^*\omega = \chi \quad (2.3.35)$$

und

$$\|\omega\|_{L^2} + \|d_k\omega\|_{L^2} \leq C \left(\|\chi\|_{H^{-\frac{1}{2}}} + \|d_{\mathbb{R}^{n-1},k}\chi\|_{H^{-\frac{1}{2}}} \right) \quad (2.3.36)$$

mit einer Konstante C , die nicht von χ oder k abhängt.

Beweis: Wir können χ in der Form

$$\chi = \sum_{\substack{|I|=k \\ 1 \notin I}} \chi_I dx^I \quad (2.3.37)$$

schreiben. Sei nun J ein Multiindex der Länge k . Falls 1 in J enthalten ist, setzen wir für $x_1 \in \mathbb{R}_-$ und $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\mathcal{F}(\eta_J)(x_1, \xi) = \frac{\mathcal{F}\left(\left(\delta_{\mathbb{R}^{n-1}, k-1}\chi\right)_{J \setminus \{1\}}\right)(\xi)}{\left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{x_1(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.3.38)$$

Andernfalls definieren wir

$$\mathcal{F}(\eta_J)(x_1, \xi) = \mathcal{F}(\chi_J)(\xi) e^{x_1(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.3.39)$$

\mathcal{F} angewandt auf Funktionen auf \mathbb{R}^{n-1} bezeichnet dabei natürlich die übliche Fouriertransformation in allen Variablen. Wir betrachten nun

$$\eta = \sum_{|J|=k} \eta_J dx^J \in \Omega^k(\mathbb{R}_-^n). \quad (2.3.40)$$

Für einen Multiindex J der Länge k mit $1 \notin J$ gilt

$$\begin{aligned} \|\eta_J\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}} |\mathcal{F}(\chi_J)(\xi)|^2 e^{2x_1(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}} dx_1 \otimes d\xi = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\mathcal{F}(\chi_J)(\xi)|^2 \cdot \frac{1}{\left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}}} d\xi = \frac{1}{2} \|\chi_J\|_{H^{-\frac{1}{2}}}^2. \end{aligned} \quad (2.3.41)$$

Für $|J| = k$, $1 \in J$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \|\eta_J\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}} \left| \frac{\mathcal{F}\left(\left(\delta_{\mathbb{R}^{n-1}, k-1}\chi\right)_{J \setminus \{1\}}\right)(\xi)}{\left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right|^2 e^{2x_1(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}} dx_1 \otimes d\xi = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left| \mathcal{F}\left(\left(\delta_{\mathbb{R}^{n-1}, k-1}\chi\right)_{J \setminus \{1\}}\right)(\xi) \right|^2 \cdot \frac{1}{\left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{3}{2}}} d\xi = \\ &= \frac{1}{2} \left\| \left(\delta_{\mathbb{R}^{n-1}, k-1}\chi\right)_{J \setminus \{1\}} \right\|_{H^{-\frac{3}{2}}}^2. \end{aligned} \quad (2.3.42)$$

Sei nun $|J| = k + 1$ mit $1 \notin J$. Dann gilt

$$(\mathrm{d}_k \eta)_J = \sum_{\nu=1}^{k+1} (-1)^{\nu+1} \frac{\partial \eta_{J \setminus \{J_\nu\}}}{\partial x_{J_\nu}}. \quad (2.3.43)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
& \| (d_k \eta)_J \|_{L^2}^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}} \left| \sum_{\nu=1}^{k+1} (-1)^{\nu+1} \frac{\partial \eta_{J \setminus \{J_\nu\}}}{\partial x_{J_\nu}} \right|^2 dx_1 \otimes d\xi = \\
&= \int_{\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}} \left| \sum_{\nu=1}^{k+1} (-1)^{\nu+1} \xi_{J_\nu} \mathcal{F}(\chi_{J \setminus J_\nu})(\xi) \right|^2 \cdot e^{2x_1(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}} dx_1 \otimes d\xi = \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left| \sum_{\nu=1}^{k+1} (-1)^{\nu+1} \xi_{J_\nu} \mathcal{F}(\chi_{J \setminus J_\nu})(\xi) \right|^2 \cdot \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}} d\xi = \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\mathcal{F}(d_{\mathbb{R}^{n-1}, k} \chi)|^2 \cdot \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}} d\xi = \\
&= \frac{1}{2} \| (d_{\mathbb{R}^{n-1}, k} \chi)_J \|_{\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}}^2.
\end{aligned} \tag{2.3.44}$$

Schließlich gilt für $|J| = k + 1$ mit $1 \in J$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}((d_k \eta)_J) = \\
&= \frac{e^{x_1(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}}}{(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}} \left((1+|\xi|^2) \mathcal{F}(\chi_{J \setminus \{1\}}) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\nu=2}^{k+1} (-1)^{\nu+1} \sqrt{-1} \xi_{J_\nu} \mathcal{F}((\delta_{\mathbb{R}^{n-1}, k-1} \chi)_{J \setminus \{1, J_\nu\}}) \right) = \\
&= \frac{e^{x_1(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}}}{(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}} \left(\mathcal{F}(\chi_{J \setminus \{1\}}) - \mathcal{F} \left(\sum_{\nu=2}^{k+1} \frac{\partial^2 \chi_{J \setminus \{1, J_\nu\}}}{\partial x_{J_\nu}^2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\nu=2}^{k+1} (-1)^{\nu+1} \mathcal{F} \left(\frac{\partial (\delta_{\mathbb{R}^{n-1}, k-1} \chi)_{J \setminus \{1, J_\nu\}}}{\partial x_{J_\nu}} \right) \right) = \\
&= \frac{e^{x_1(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}}}{(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}} \left(\mathcal{F}(\chi_{J \setminus \{1\}}) + \mathcal{F}(\Delta_{\mathbb{R}^{n-1}, k} \chi_{J \setminus \{1\}}) - \right. \\
&\quad \left. - \mathcal{F}((d_{\mathbb{R}^{n-1}, k-1} \delta_{\mathbb{R}^{n-1}, k-1} \chi)_{J \setminus \{1\}}) \right) = \\
&= \frac{e^{x_1(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}}}{(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}} \left(\mathcal{F} \left(((1 + \delta_{\mathbb{R}^{n-1}, k} d_{\mathbb{R}^{n-1}, k}) \chi)_{J \setminus \{1\}} \right) \right).
\end{aligned} \tag{2.3.45}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \| (d_k \eta)_J \|_{L^2}^2 = \\
&= \int_{\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}} \frac{e^{2x_1(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}}}{1+|\xi|^2} \left| \mathcal{F} \left(((1 + \delta_{\mathbb{R}^{n-1},k} d_{\mathbb{R}^{n-1},k}) \chi)_{J \setminus \{1\}} \right) (\xi) \right|^2 \\
& \hspace{25em} dx_1 \otimes d\xi = \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{3}{2}}} \left| \mathcal{F} \left(((1 + \delta_{\mathbb{R}^{n-1},k} d_{\mathbb{R}^{n-1},k}) \chi)_{J \setminus \{1\}} \right) (\xi) \right|^2 d\xi = \\
&= \frac{1}{2} \left\| ((1 + \delta_{\mathbb{R}^{n-1},k} d_{\mathbb{R}^{n-1},k}) \chi)_{J \setminus \{1\}} (\xi) \right\|_{H^{-\frac{3}{2}}}^2.
\end{aligned} \tag{2.3.46}$$

Zusammenfassend gilt also

$$\begin{aligned}
& \|\eta\|_{L^2}^2 + \|d_k \eta\|_{L^2}^2 = \sum_{|J|=k} \|\eta_J\|_{L^2}^2 + \sum_{|J|=k+1} \|(d_k \eta)_J\|_{L^2}^2 = \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{\substack{|J|=k \\ 1 \notin J}} \|\chi_J\|_{H^{-\frac{1}{2}}}^2 + \sum_{\substack{|J|=k \\ 1 \in J}} \left\| (\delta_{\mathbb{R}^{n-1},k-1} \chi)_{J \setminus \{1\}} \right\|_{H^{-\frac{3}{2}}}^2 + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{\substack{|J|=k+1 \\ 1 \notin J}} \left\| (d_{\mathbb{R}^{n-1},k} \chi)_J \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}}^2 + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{\substack{|J|=k+1 \\ 1 \in J}} \left\| ((1 + \delta_{\mathbb{R}^{n-1},k} d_{\mathbb{R}^{n-1},k}) \chi)_{J \setminus \{1\}} \right\|_{H^{-\frac{3}{2}}}^2 \right) \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \left(\|\chi\|_{H^{-\frac{1}{2}}}^2 + \|\delta_{\mathbb{R}^{n-1},k-1} \chi\|_{H^{-\frac{3}{2}}}^2 + \|d_{\mathbb{R}^{n-1},k} \chi\|_{H^{-\frac{1}{2}}}^2 + \right. \\
& \quad \left. + \|(1 + \delta_{\mathbb{R}^{n-1},k} d_{\mathbb{R}^{n-1},k}) \chi\|_{H^{-\frac{3}{2}}}^2 \right).
\end{aligned} \tag{2.3.47}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
& \|\eta\|_{L^2} + \|d_k \eta\|_{L^2} \leq \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\|\chi\|_{H^{-\frac{1}{2}}} + \|\delta_{\mathbb{R}^{n-1},k-1} \chi\|_{H^{-\frac{3}{2}}} + \|d_{\mathbb{R}^{n-1},k} \chi\|_{H^{-\frac{1}{2}}} + \right. \\
& \quad \left. + \|(1 + \delta_{\mathbb{R}^{n-1},k} d_{\mathbb{R}^{n-1},k}) \chi\|_{H^{-\frac{3}{2}}} \right) \leq \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\|\chi\|_{H^{-\frac{1}{2}}} + C_1 \|\chi\|_{H^{-\frac{1}{2}}} + \|d_{\mathbb{R}^{n-1},k} \chi\|_{H^{-\frac{1}{2}}} + \right. \\
& \quad \left. + \|\chi\|_{H^{-\frac{1}{2}}} + C_2 \|d_{\mathbb{R}^{n-1},k} \chi\|_{H^{-\frac{1}{2}}} \right)
\end{aligned} \tag{2.3.48}$$

mit geeigneten positiven Konstanten C_1 und C_2 , die weder von χ noch von k abhängen. Zu $\tilde{C} \geq 2$ wählen wir nun eine Funktion

$$h \in C_0^\infty(\mathbb{R}_-^n), \quad (2.3.49)$$

für die

$$i^*h|_{\text{supp } \chi} \equiv 1 \quad (2.3.50)$$

und

$$\|h\|_{L^\infty} + \|d_0 h\|_{L^\infty} \leq \tilde{C} \quad (2.3.51)$$

gilt und setzen

$$\omega := h \cdot \eta \in \Omega_0^k(\mathbb{R}_-^n). \quad (2.3.52)$$

So eine Funktion h läßt sich immer finden. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \|\omega\|_{L^2} + \|d_k \omega\|_{L^2} \leq \\ & \leq \|\omega\|_{L^2} + \|d_0 h \wedge \omega\|_{L^2} + \|h \cdot d_k \omega\|_{L^2} \leq \\ & \leq 2\tilde{C} \|\eta\|_{L^2} + \tilde{C} \|d_k \eta\|_{L^2} \leq 2\tilde{C} (\|\eta\|_{L^2} + \|d_k \eta\|_{L^2}). \end{aligned} \quad (2.3.53)$$

Die zweite von ω geforderte Eigenschaft folgt also mit

$$C := \sqrt{2}\tilde{C} (2 + C_1 + C_2). \quad (2.3.54)$$

Die erste Eigenschaft folgt aus

$$\begin{aligned} i^* \omega &= i^* \eta = \\ &= \sum_{\substack{|J|=k \\ 1 \notin J}} \eta_J(0, \cdot) dx^J = \\ &= \sum_{\substack{|J|=k \\ 1 \notin J}} \chi_J dx^J = \chi. \end{aligned} \quad (2.3.55)$$

□

6. Schritt: Sei M eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann gibt es eine Konstante $\tilde{C} > 0$, so daß es für jedes $\chi \in \Omega^k(\partial M)$ ein $\omega \in \Omega^k(M)$ gibt, für das

$$i^* \omega = \chi \quad (2.3.56)$$

und

$$\|\omega\|_{D_M} \leq \tilde{C} \|\chi\|_{D_{\partial M}^{-\frac{1}{2}}} \quad (2.3.57)$$

gilt. Dabei darf \tilde{C} von M , nicht aber von χ oder k abhängen.

Beweis: Wir wählen zu M einen endlichen Atlas

$$\mathcal{A} = (U_a, \varphi_a)_{a \in A} \quad (2.3.58)$$

mit präkompakten Karten und eine subordinierte Zerlegung der Eins

$$(g_a)_{a \in A} \subset C^\infty(M) \quad (2.3.59)$$

wie im Beweis zu Schritt 4. Wir schreiben χ in der Form

$$\chi = \sum_{a \in A} (i^* g_a) \cdot \chi. \quad (2.3.60)$$

Für diejenigen $a \in A$, für die

$$U_a \cap \partial M \neq \emptyset \quad (2.3.61)$$

gilt, setzen wir $(i^* g_a) \cdot \chi$ gemäß Schritt 5 zu ω_a fort. Zu jedem $a \in A$ ist es möglich, eine Funktion

$$h_a \in C_0^\infty(\varphi_a(U_a)) \quad (2.3.62)$$

zu wählen, so daß für ein offenes $V_a \subset \varphi_a(U_a)$ mit $\overline{V_a} \subset \varphi_a(U_a)$

$$h_a|_{\text{supp}(g_a \circ \varphi_a^{-1})} \equiv 1 \quad \text{und} \quad \text{supp } h_a \subset V_a \quad (2.3.63)$$

gilt. Da \mathcal{A} endlich ist, gibt es ein $\tilde{C} < \infty$, so daß für alle so gewählten h_a

$$\|h_a\|_{L^\infty} + \|d_0 h_a\|_{L^\infty} \leq \tilde{C} \quad (2.3.64)$$

gilt. Daher können wir annehmen, daß

$$\text{supp } \omega_a \subset U_a \quad (2.3.65)$$

gilt. Für

$$\omega := \sum_{\substack{a \in A \\ U_a \cap \partial M \neq \emptyset}} \omega_a \in \Omega^k(M) \quad (2.3.66)$$

gilt dann mit

$$\hat{C} := \max_{a \in A} (\|i^* g_a\|_{L^\infty} + \|d_{\partial M, 0} i^* g_a\|_{L^\infty}) < \infty \quad (2.3.67)$$

und

$$\tilde{C} := 4|A| \cdot C \cdot \hat{C} \quad (2.3.68)$$

die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\|\omega\|_{\mathcal{D}_M} &\leq \sum_{\substack{a \in A \\ U_a \cap \partial M \neq \emptyset}} \|\omega_a\|_{\mathcal{D}_M} \leq \\
&\leq 2C \sum_{\substack{a \in A \\ U_a \cap \partial M \neq \emptyset}} \|(i^* g_a) \cdot \chi\|_{\mathcal{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2}}} \leq \\
&\leq 4C \cdot \widehat{C} \sum_{\substack{a \in A \\ U_a \cap \partial M \neq \emptyset}} \|\chi\|_{\mathcal{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2}}} \leq \\
&\leq 4|A| \cdot C \cdot \widehat{C} \|\chi\|_{\mathcal{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2}}} = \\
&= \widetilde{C} \|\chi\|_{\mathcal{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2}}}.
\end{aligned} \tag{2.3.69}$$

Dabei sei C wie in Schritt 5 gegeben (bezüglich dem hier angegebenen \widetilde{C} konstruiert). Es gilt

$$\begin{aligned}
i^* \omega &= \sum_{\substack{a \in A \\ U_a \cap \partial M \neq \emptyset}} i^* \omega_a = \\
&= \sum_{\substack{a \in A \\ U_a \cap \partial M \neq \emptyset}} i^* g_a \cdot \chi = \chi.
\end{aligned} \tag{2.3.70}$$

□

In Schritt 4 wurde gezeigt, daß

$$i^* : (\Omega(M), \|\cdot\|_{\mathcal{D}_M}) \rightarrow \left(\Omega(\partial M), \|\cdot\|_{\mathcal{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2}}} \right) \tag{2.3.71}$$

beschränkt ist. Daher kann i^* durch Stetigkeit zu

$$i^* : (\mathcal{D}_M, \|\cdot\|_{\mathcal{D}_M}) \rightarrow \left(\mathcal{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2}}, \|\cdot\|_{\mathcal{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2}}} \right) \tag{2.3.72}$$

fortgesetzt werden. In Schritt 6 wurde ein beschränkter Fortsetzungsoperator

$$T : \left(\Omega(\partial M), \|\cdot\|_{\mathcal{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2}}} \right) \rightarrow (\Omega(M), \|\cdot\|_{\mathcal{D}_M}) \tag{2.3.73}$$

konstruiert, für den

$$i^* \circ T = \text{id} \tag{2.3.74}$$

gilt. T kann also auch durch Stetigkeit zu

$$T : \left(\mathcal{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2}}, \|\cdot\|_{\mathcal{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2}}} \right) \rightarrow (\mathcal{D}_M, \|\cdot\|_{\mathcal{D}_M}) \tag{2.3.75}$$

fortgesetzt werden. Da i^* stetig ist, gilt Formel (2.3.74) auch für diese Fortsetzung von T . Daher ist

$$i^* : \mathcal{D}_M \rightarrow \mathcal{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2}} \quad (2.3.76)$$

surjektiv. ■

Dieser Beweis entspricht weitestgehend dem Beweis, der in der Arbeit von PAQUET [11] angegeben ist. Ein anderer Beweis von Satz 2.3.1 wurde von M. Lesch gegeben. Da der Spursatz von Paquet 2.3.1 eine wesentliche Aussage dieser Arbeit ist, werden wir auch diesen zweiten Beweis wiedergeben.

Alternativer Beweis zum Spursatz von Paquet: Sei $f \in C_0^\infty([0, \infty))$ und $\lambda > 0$ gegeben. Dann gilt mit der Ungleichung von Cauchy–Schwarz

$$\begin{aligned} |f(0)| &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda x} |f(0)| \, dx = \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda x} \left| f(x) - \int_0^x f'(y) \, dy \right| \, dx \leq \\ &\leq \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda x} |f(x)| \, dx + \lambda \int_0^\infty \int_y^\infty e^{-\lambda x} \, dx |f'(y)| \, dy \leq \quad (2.3.77) \\ &\leq \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \|f\|_{L^2} + \int_0^\infty e^{-\lambda y} |f'(y)| \, dy \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \|f\|_{L^2} + \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \|f'\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Da für alle $a, b \in \mathbb{R}$

$$(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) \quad (2.3.78)$$

gilt, folgt

$$|f(0)|^2 \leq \lambda \|f\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\lambda} \|f'\|_{L^2}^2. \quad (2.3.79)$$

Es gibt einen Kragen U um N , für den

$$U \simeq [0, 1) \times N \quad (2.3.80)$$

gilt. π_1 und π_2 bezeichnen die kanonischen Projektionen

$$\pi_1 : U \rightarrow [0, 1) \quad \text{und} \quad \pi_2 : U \rightarrow N, \quad (2.3.81)$$

dx^\sharp bezeichnet die äußere Normale von M . Wir wählen eine Funktion $\psi \in C_0^\infty([0, 1))$, die in der Nähe von 0 identisch 1 ist. Da

$$\Delta_N : \text{im } D_N^* \cap \mathcal{D}(\Delta_N) \rightarrow \text{im } D_N^* \quad (2.3.82)$$

ein positiver selbstadjungierter elliptischer Differentialoperator ist, gibt es eine Orthonormalbasis $(\varphi_n^k)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega^k(N)$ von $\text{im } D_{N,k}^*$ aus Eigenformen von $\Delta_{N,k}$ mit zugehörigen Eigenwerten $(\lambda_n^k)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$. Es gilt also

$$\Delta_{N,k} \varphi_n^k = d_{N,k}^t d_{N,k} \varphi_n^k = \lambda_n^k \varphi_n^k. \quad (2.3.83)$$

Folglich ist

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n^k}} d_{N,k} \varphi_n^k \right)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega^{k+1}(N) \quad (2.3.84)$$

eine Orthonormalbasis von $\text{im } D_{N,k}$ mit

$$\Delta_{N,k} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n^k}} d_{N,k} \varphi_n^k \right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n^k}} d_{N,k} d_{N,k}^t d_{N,k} \varphi_n^k = \lambda_n^k \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_n^k}} d_{N,k} \varphi_n^k. \quad (2.3.85)$$

Sei $\vartheta \in \Omega^k(N)$ gegeben. Mit geeigneten $\vartheta_{1,n}$ und $\vartheta_{2,n} \in \mathbb{C}$ kann ϑ in der Form

$$\begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_0 + \vartheta_1 + \vartheta_2 = \\ &= \vartheta_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\vartheta_{1,n}}{\sqrt{\lambda_n^{k-1}}} d_{N,k-1} \varphi_n^{k-1} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \vartheta_{2,n} \varphi_n^k \\ &\in \widehat{\mathcal{H}}_{N,k} \oplus \text{im } D_{N,k-1} \oplus \text{im } D_{N,k}^* \end{aligned} \quad (2.3.86)$$

geschrieben werden. Da Δ_N auf $\text{im } D_N \oplus \text{im } D_N^*$ ein positiver elliptischer Differentialoperator ist und für $s \in \mathbb{R}$

$$(1 + \Delta_N)^{\frac{s}{2}} \Big|_{\widehat{\mathcal{H}}_N} = 1 \quad (2.3.87)$$

gilt, wird durch

$$\begin{aligned} \|\vartheta\|_{\mathbb{H}^s}^2 &:= \|\vartheta_0\|_{L^2}^2 + \left\| (\Delta_{N,k})^{\frac{s}{2}} \vartheta_1 \right\|_{L^2}^2 + \left\| (\Delta_{N,k})^{\frac{s}{2}} \vartheta_2 \right\|_{L^2}^2 = \\ &= \|\vartheta_0\|_{L^2}^2 + \sum_{n \in \mathbb{N}} |\vartheta_{1,n}|^2 (\lambda_n^{k-1})^s + \sum_{n \in \mathbb{N}} |\vartheta_{2,n}|^2 (\lambda_n^k)^s \end{aligned} \quad (2.3.88)$$

eine Sobolevnorm der Stufe s auf ϑ erklärt. Da $\Omega(N) \subset \mathbb{H}^s(\wedge T^*N)$ dicht liegt und gemäß Satz 2.2.3 und Satz 2.2.4

$$\widehat{\mathcal{H}}_{D_N} = \widehat{\mathcal{H}}_{D_N^s} \subset \Omega(N) \quad (2.3.89)$$

gilt, kann jedes $\vartheta \in \mathbb{H}^s(\wedge^k T^*N)$ in der Form

$$\vartheta = \vartheta_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\vartheta_{1,n}}{\sqrt{\lambda_n^{k-1}}} d_{N,k-1} \varphi_n^{k-1} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \vartheta_{2,n} \varphi_n^k \quad (2.3.90)$$

mit $\vartheta_0 \in \widehat{\mathcal{H}}_{N,k}$ und $\vartheta_{1,n}, \vartheta_{2,n} \in \mathbb{C}$ zerlegt werden. Eine Sobolevnorm der Stufe s kann auch hier wieder durch

$$\|\vartheta\|_{\mathbb{H}^s}^2 := \|\vartheta_0\|_{L^2}^2 + \sum_{n \in \mathbb{N}} |\vartheta_{1,n}|^2 (\lambda_n^{k-1})^s + \sum_{n \in \mathbb{N}} |\vartheta_{2,n}|^2 (\lambda_n^k)^s \quad (2.3.91)$$

definiert werden.

Sei $\omega \in \Omega^k(M)$ gegeben. Auf U können wir ω in der Form

$$\omega = \omega_0 + dx \wedge \omega_1 \quad (2.3.92)$$

mit $\omega_0 \in C^\infty([0,1], \Omega^k(N))$ und $\omega_1 \in C^\infty([0,1], \Omega^{k-1}(N))$ schreiben. Gemäß der Hodgerzerlegung 1.1.8 zerlegen wir

$$\omega_0 = \omega_{0,0} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\omega_{0,1,n}}{\sqrt{\lambda_n^{k-1}}} \pi_2^* d_{N,k-1} \varphi_n^{k-1} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \omega_{0,2,n} \pi_2^* \varphi_n^k \quad (2.3.93)$$

mit $\omega_{0,0} \in C^\infty([0,1], \widehat{\mathcal{H}}_{N,k})$, $\omega_{0,1,n}, \omega_{0,2,n} \in C^\infty([0,1])$ und

$$\omega_1 = \omega_{1,0} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\omega_{1,1,n}}{\sqrt{\lambda_n^{k-2}}} \pi_2^* d_{N,k-2} \varphi_n^{k-2} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \omega_{1,2,n} \pi_2^* \varphi_n^{k-1} \quad (2.3.94)$$

mit $\omega_{1,0} \in C^\infty([0,1], \widehat{\mathcal{H}}_{N,k-1})$, $\omega_{1,1,n}, \omega_{1,2,n} \in C^\infty([0,1])$.

Wir wählen nun $\psi \in C_0^\infty([0,1])$ mit $0 \leq \psi \leq 1$ und so, daß in einer 0-Umgebung $\psi = 1$ gilt. Dann folgt aus Formel (2.3.79) mit geeigneten Konstanten C_1, C_2, C_3 und C_4

$$\begin{aligned} \|\omega_{0,0}(0)\|_{L^2(N)}^2 &\leq \|\omega_{0,0} \cdot (\psi \circ \pi_1)\|_{L^2(U)}^2 + \|(\omega_{0,0} \cdot (\psi \circ \pi_1))'\|_{L^2(U)}^2 \leq \\ &\leq \|\omega \cdot (\psi \circ \pi_1)\|_{L^2(U)}^2 + \|\bar{d}_{M,k}(\omega \cdot (\psi \circ \pi_1))\|_{L^2(U)}^2, \end{aligned} \quad (2.3.95)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{n \in \mathbb{N}} |\omega_{0,1,n}(0)|^2 (\lambda_n^{k-1})^{-\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} (\lambda_n^{k-1})^{-\frac{1}{2}} \left((\lambda_n^{k-1})^{\frac{1}{2}} \|\omega_{0,1,n} \cdot \psi\|_{L^2([0,1])}^2 + \right. \\ &\quad \left. + (\lambda_n^{k-1})^{-\frac{1}{2}} \|(\omega_{0,1,n} \cdot \psi)'\|_{L^2([0,1])}^2 \right) = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \|\omega_{0,1,n} \cdot \psi\|_{L^2([0,1])}^2 + \sum_{n \in \mathbb{N}} (\lambda_n^{k-1})^{-1} \|(\omega_{0,1,n} \cdot \psi)'\|_{L^2([0,1])}^2 \leq \\ &\leq \|\omega \cdot (\psi \circ \pi_1)\|_{L^2(U)}^2 + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} \|\omega_{1,2,n} \cdot \psi\|_{L^2([0,1])}^2 + \\ &\quad + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} (\lambda_n^{k-1})^{-1} \left\| (\omega_{0,1,n} \cdot \psi)' - (\lambda_n^{k-1})^{\frac{1}{2}} (\omega_{1,2,n} \cdot \psi) \right\|_{L^2([0,1])}^2 \leq \\ &\leq \|\omega \cdot (\psi \circ \pi_1)\|_{L^2(U)}^2 + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} \|\omega_{1,2,n} \cdot \psi\|_{L^2([0,1])}^2 + \\ &\quad + C_1 \sum_{n \in \mathbb{N}} \left\| (\omega_{0,1,n} \cdot \psi)' - (\lambda_n^{k-1})^{\frac{1}{2}} (\omega_{1,2,n} \cdot \psi) \right\|_{L^2([0,1])}^2 \leq \\ &\leq 3 \|\omega \cdot (\psi \circ \pi_1)\|_{L^2(U)}^2 + C_1 \|\bar{d}_{M,k}(\omega \cdot (\psi \circ \pi_1))\|_{L^2(U)}^2 \end{aligned} \quad (2.3.96)$$

und

$$\begin{aligned} &\sum_{n \in \mathbb{N}} |\omega_{0,2,n}(0)|^2 (\lambda_n^k)^{-\frac{1}{2}} \leq C_2 \sum_{n \in \mathbb{N}} |\omega_{0,2,n}(0)|^2 \leq \\ &\leq C_2 \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \|\omega_{0,2,n} \cdot \psi\|_{L^2([0,1])}^2 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \|(\omega_{0,2,n} \cdot \psi)'\|_{L^2([0,1])}^2 \right) \leq \quad (2.3.97) \\ &\leq C_2 \left(\|\omega \cdot (\psi \circ \pi_1)\|_{L^2(U)}^2 + \|\bar{d}_{M,k}(\omega \cdot (\psi \circ \pi_1))\|_{L^2(U)}^2 \right), \end{aligned}$$

woraus wir

$$\begin{aligned}
& \|i^* \omega\|_{\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}}^2 = \\
& = \|\omega_{0,0}(0)\|_{L^2(U)}^2 + \sum_{n \in \mathbb{N}} |\omega_{0,1,n}(0)|^2 (\lambda_n^{k-1})^{-\frac{1}{2}} + \\
& \quad + \sum_{n \in \mathbb{N}} |\omega_{0,2,n}(0)|^2 (\lambda_n^k)^{-\frac{1}{2}} \leq \\
& \leq C_3 \left(\|\omega \cdot (\psi \circ \pi_1)\|_{L^2(U)}^2 + \|\bar{d}_{M,k}(\omega \cdot (\psi \circ \pi_1))\|_{L^2(U)}^2 \right) \leq \\
& \leq C_3 \left(\|\omega \cdot (\psi \circ \pi_1)\|_{L^2(M)}^2 + \|\bar{d}_{M,k}(\omega \cdot (\psi \circ \pi_1))\|_{L^2(M)}^2 \right) \leq \\
& \leq C_4 \left(\|\omega\|_{L^2(M)}^2 + \|\bar{d}_{M,k}\omega\|_{L^2(M)}^2 \right)
\end{aligned} \tag{2.3.98}$$

erhalten. Folglich gilt auch

$$\begin{aligned}
\|d_{N,k} i^* \omega\|_{\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}}^2 & = \|i^* \bar{d}_{M,k}\omega\|_{\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}}^2 \leq \\
& \leq C_4 \|\bar{d}_{M,k}\omega\|_{L^2}^2 \leq C_4 \left(\|\omega\|_{L^2}^2 + \|\bar{d}_{M,k}\omega\|_{L^2}^2 \right).
\end{aligned} \tag{2.3.99}$$

Daher setzt sich

$$i^* : \Omega(M) \rightarrow \Omega(N) \tag{2.3.100}$$

stetig zu

$$i^* : (\mathcal{D}_M, \|\cdot\|_{\mathcal{D}_M}) \rightarrow \left(\mathcal{D}_N^{-\frac{1}{2}}, \|\cdot\|_{\mathcal{D}_N^{-\frac{1}{2}}} \right) \tag{2.3.101}$$

fort.

Sei nun $\chi \in \mathcal{D}_{N,k}^{-\frac{1}{2}}$ gegeben. Wir zerlegen

$$\chi = \chi_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\chi_{1,n}}{\sqrt{\lambda_n^{k-1}}} d_{N,k-1} \varphi_n^{k-1} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \chi_{2,n} \varphi_n^k \tag{2.3.102}$$

mit $\chi_0 \in \widehat{\mathcal{H}}_{N,k}$, $\chi_{1,n}, \chi_{2,n} \in \mathbb{C}$. Da $\chi \in \mathcal{D}_{N,k}^{-\frac{1}{2}}$ gilt, folgt aus Lemma 2.2.6

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \chi_{2,n} \varphi_n^k \in \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\wedge^k T^* N). \tag{2.3.103}$$

Wir setzen auf U

$$\begin{aligned}
\vartheta & := \pi_2^* \chi_0 \cdot e^{-\pi_1} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \chi_{2,n} \cdot e^{-\sqrt{\lambda_n^k} \cdot \pi_1} \pi_2^* \varphi_n^k + \\
& \quad + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\chi_{1,n}}{\sqrt{\lambda_n^{k-1}}} \cdot e^{-\sqrt{\lambda_n^{k-1}} \cdot \pi_1} \pi_2^* d_{N,k-1} \varphi_n^{k-1} - \\
& \quad - \sum_{n \in \mathbb{N}} \chi_{1,n} \cdot e^{-\sqrt{\lambda_n^{k-1}} \cdot \pi_1} dx \wedge \pi_2^* \varphi_n^{k-1}.
\end{aligned} \tag{2.3.104}$$

Wegen

$$\int_0^{\infty} |e^{-\sqrt{\lambda}x}|^2 dx = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \quad (2.3.105)$$

für $\lambda > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \|\vartheta\|_{L^2}^2 &\leq \frac{1}{2} \|\chi_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} |\chi_{2,n}|^2 (\lambda_n^k)^{-\frac{1}{2}} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} |\chi_{1,n}|^2 (\lambda_n^{k-1})^{-\frac{1}{2}} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} |\chi_{1,n}|^2 (\lambda_n^{k-1})^{-\frac{1}{2}} \leq \|\chi\|_{H^{-\frac{1}{2}}}^2 < \infty. \end{aligned} \quad (2.3.106)$$

Daher liegt ϑ in $L^2(\wedge^k T^*U)$. Nun gilt

$$\begin{aligned} &\sum_{n \in \mathbb{N}} \left\| \chi_{2,n} \cdot e^{-\sqrt{\lambda_n^k} \cdot \pi_1} \pi_2^* d_{N,k} \varphi_n^k \right\|_{L^2(U)}^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} |\chi_{2,n}|^2 \cdot (\lambda_n^k)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \|\chi_{2,n} \varphi_n^k\|_{H^{\frac{1}{2}}(N)}^2 < \infty \end{aligned} \quad (2.3.107)$$

und

$$\begin{aligned} &\sum_{n \in \mathbb{N}} \left\| \chi_{2,n} (\lambda_n^k)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\sqrt{\lambda_n^k} \cdot \pi_1} \pi_2^* \varphi_n^k \right\|_{L^2(U)}^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} |\chi_{2,n}|^2 \cdot (\lambda_n^k)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \|\chi_{2,n} \varphi_n^k\|_{H^{\frac{1}{2}}(N)}^2 < \infty \end{aligned} \quad (2.3.108)$$

da

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \chi_{2,n} \varphi_n^k \in H^{\frac{1}{2}}(\wedge^k T^*N) \quad (2.3.109)$$

gilt. Es folgt $\vartheta \in \mathcal{D}_{M,k}|_U$ und

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{M,k}|_U \vartheta &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \chi_{2,n} \cdot e^{-\sqrt{\lambda_n^k} \cdot \pi_1} \pi_2^* d_{N,k} \varphi_n^k - \\ &\quad - dx \wedge \left(\chi_0 e^{-\pi_1} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \chi_{2,n} (\lambda_n^k)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\sqrt{\lambda_n^k} \cdot \pi_1} \pi_2^* d_{N,k} \varphi_n^k \right) \\ &\in L^2(\wedge^k T^*N). \end{aligned} \quad (2.3.110)$$

Außerdem gilt

$$i^* \vartheta = \chi_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\chi_{1,n}}{\sqrt{\lambda_n^{k-1}}} d_{N,k-1} \varphi_n^{k-1} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \chi_{2,n} \varphi_n^k = \chi. \quad (2.3.111)$$

Auf U setzen wir

$$\omega := (\psi \circ \pi_1) \cdot \vartheta. \quad (2.3.112)$$

ω kann auf M trivial fortgesetzt werden. Wir erhalten

$$\omega \in \mathcal{D}_{M,k} \quad \text{und} \quad i^* \omega = i^* \vartheta = \chi. \quad (2.3.113)$$

Daher ist

$$i^* : \mathcal{D}_M \rightarrow \mathcal{D}_N^{-\frac{1}{2}} \quad (2.3.114)$$

surjektiv. ■

2.3.2 Korollar:

$$i^* : (\mathcal{D}_M, \|\cdot\|_{\mathcal{D}_M}) \rightarrow \mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\wedge T^*M) \quad (2.3.115)$$

ist wohldefiniert und stetig.

Beweis: Die Aussage folgt direkt aus dem Spursatz von Paquet 2.3.1, da durch Konvergenz in

$$\left(\mathcal{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2}}, \|\cdot\|_{\mathcal{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2}}} \right) \quad (2.3.116)$$

Konvergenz in

$$\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\wedge T^*M) \quad (2.3.117)$$

impliziert wird. ■

Aus dem Spursatz von Paquet 2.3.1 ergeben sich nun interessante Verallgemeinerungen von einigen klassischen Aussagen, die für glatte Differentialformen gelten. Dazu zählen insbesondere die Vertauschbarkeit von i^* mit der äußeren Ableitung und der Satz von Stokes.

2.3.3 Lemma: Sei M eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand und $\omega \in \mathcal{D}_{M,k}$. Dann gilt

$$i^* \mathcal{D}_{M,k} \omega = \mathcal{D}_{\partial M,k}^{-\frac{1}{2}} i^* \omega. \quad (2.3.118)$$

Beweis: $i^*D_{M,k}\omega$ ist wegen

$$\text{im } D_{M,k} \subset \mathcal{D}_{M,k+1} \quad (2.3.119)$$

definiert. Wegen Lemma 2.1.21 gibt es eine Folge $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega^k(M)$, so daß

$$\omega_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} \omega \quad \text{und} \quad \bar{d}_{M,k}\omega_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} D_{M,k}\omega \quad (2.3.120)$$

gilt. Da

$$i^* : (\mathcal{D}_M, \|\cdot\|_{\mathcal{D}_M}) \rightarrow \left(\mathcal{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2}}, \|\cdot\|_{\mathcal{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2}}} \right) \quad (2.3.121)$$

wegen dem Spursatz von Paquet 2.3.1 stetig ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} i^*D_{M,k}\omega &= i^*\Gamma_{\mathcal{D}_M} \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{d}_{M,k}\omega_n = \\ &= \Gamma_{\mathcal{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2}}} \lim_{n \rightarrow \infty} i^*\bar{d}_{M,k}\omega_n = \\ &= \Gamma_{\mathcal{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2}}} \lim_{n \rightarrow \infty} d_{\partial M,k}i^*\omega_n = D_{\partial M,k}^{-\frac{1}{2}}i^*\omega. \end{aligned} \quad (2.3.122)$$

Die letzte Gleichheit gilt, da wegen der Stetigkeit von i^* die Folge

$$(i^*\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega^k(\partial M) \quad (2.3.123)$$

in $H^{-\frac{1}{2}}(\wedge^k T^* \partial M)$ gegen $i^*\omega$ konvergiert, und die Folge

$$(d_{\partial M}i^*\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega^{k+1}(\partial M) \quad (2.3.124)$$

in $H^{-\frac{1}{2}}(\wedge^{k+1} T^* \partial M)$ konvergiert, wie man am Anfang der Rechnung sieht. Daher muß der Grenzwert gleich $D_{\partial M,k}^{-\frac{1}{2}}i^*\omega$ sein.

$\Gamma_{\mathcal{D}_M}$ -lim bezeichnet den Grenzwert bezüglich der Graphennorm von \mathcal{D}_M und $\Gamma_{\mathcal{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2}}}$ -lim den Grenzwert bezüglich der Graphennorm von $\mathcal{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2}}$. ■

2.3.4 Korollar: Sei M wie in Lemma 2.3.3 gegeben und $\omega \in \mathcal{D}_{M,k}$, so daß $i^*\omega$ in $\mathcal{D}_{\partial M,k}$ liegt. Dann gilt

$$i^*D_{M,k}\omega = D_{\partial M,k}i^*\omega. \quad (2.3.125)$$

Beweis: Wegen

$$D_{\partial M,k}i^*\omega = D_{\partial M,k}^{-\frac{1}{2}}i^*\omega \quad (2.3.126)$$

ist die Aussage aufgrund von Lemma 2.3.3 klar. ■

2.3.5 Satz: Sei M eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann gilt

$$\ker i^* = \mathcal{D}(d_{M,min}). \quad (2.3.127)$$

Beweis: Sei $\omega \in \mathcal{D}(d_{M,min})$ gegeben. Dann gibt es eine Folge $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega_0(\overset{\circ}{M})$, so daß

$$\omega_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} \omega \quad \text{und} \quad d_M \omega_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} d_{M,min} \omega \quad (2.3.128)$$

gilt. Gemäß Korollar 2.3.2 ist

$$i^* : (\mathcal{D}_M, \|\cdot\|_{D_M}) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\wedge T^* \partial M) \quad (2.3.129)$$

stetig. Weil ω_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ kompakten Träger in $\overset{\circ}{M}$ besitzt, gilt

$$i^* \omega_n = 0. \quad (2.3.130)$$

Daher folgt

$$\begin{aligned} i^* \omega &= i^* \Gamma_{D_M} \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \\ &= H^{-\frac{1}{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} i^* \omega_n = 0. \end{aligned} \quad (2.3.131)$$

Es bleibt zu zeigen, daß

$$\ker i^* \subset \mathcal{D}(d_{M,min}) \quad (2.3.132)$$

gilt. Sei

$$\omega \in \ker i^* \quad (2.3.133)$$

gegeben. Dann gibt es eine Folge $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega(M)$ mit

$$\omega_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} \omega \quad \text{und} \quad \bar{d}_M \omega_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} D_M \omega. \quad (2.3.134)$$

Wegen der Stetigkeit von i^* gilt

$$i^* \omega_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{H^{-\frac{1}{2}}} i^* \omega = 0 \quad \text{und} \quad d_{\partial M} i^* \omega_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{H^{-\frac{1}{2}}} D_{\partial M}^{-\frac{1}{2}} i^* \omega = 0, \quad (2.3.135)$$

und $(i^* \omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge in $\Omega(\partial M)$. Mit dem in Schritt 6 vom Spursatz von Paquet 2.3.1 konstruierten stetigen Fortsetzungsoperator

$$T : \left(\Omega(\partial M), \|\cdot\|_{D_{\partial M}^{-\frac{1}{2}}} \right) \rightarrow \left(\Omega(M), \|\cdot\|_{D_M} \right) \quad (2.3.136)$$

gilt

$$T \circ i^* \omega_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\Gamma_{\mathbb{D}M}} T \circ i^* \omega = 0. \quad (2.3.137)$$

Folglich gilt

$$\omega_n - T \circ i^* \omega_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\Gamma_{\mathbb{D}M}} \omega, \quad (2.3.138)$$

und wegen

$$i^* \circ T = \text{id} \quad (2.3.139)$$

folgt

$$\omega_n - T \circ i^* \omega_n \in \ker i^* \cap \Omega(M). \quad (2.3.140)$$

Es genügt also zu zeigen, daß

$$\ker i^* \cap \Omega(M) \subset \mathcal{D}(d_{M,\min}) \quad (2.3.141)$$

gilt.

Wir wählen in der Nähe des Randes von M eine Produktmetrik

$$dx^2 \oplus g_{\partial M}, \quad (2.3.142)$$

wobei dx^\sharp die äußere Normale von M bezeichnet. Außerdem wählen wir einen Kragen U um ∂M , der isomorph zu

$$[0, 1) \times \partial M \quad (2.3.143)$$

ist.

$$\varphi : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.3.144)$$

sei eine C_0^∞ -Funktion, für die

$$\varphi = 1 \quad (2.3.145)$$

in der Nähe von 0 gilt. Wir setzen

$$\varphi_n(x) := \varphi(nx). \quad (2.3.146)$$

$\omega \in \ker i^* \cap \Omega^k(M)$ können wir auf U als

$$\omega = \vartheta_0 + dx \wedge \vartheta_1 \quad (2.3.147)$$

mit $\vartheta_0(x) \in \Omega^k(\partial M)$ und $\vartheta_1(x) \in \Omega^{k-1}(\partial M)$ schreiben. Wir definieren auf U

$$\omega_n := (1 - \varphi_n) \omega. \quad (2.3.148)$$

Es gilt dann sicherlich

$$\omega_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} \omega. \quad (2.3.149)$$

Wegen

$$i^* \omega = 0 \quad (2.3.150)$$

gilt

$$\vartheta_0(0) = 0. \quad (2.3.151)$$

Daher gilt analog zum ersten Teil vom Beweis zu Theorem 2.1.11

$$\bar{d}_{M,k} \omega_n = (1 - \varphi_n) \bar{d}_{M,k} \omega - \varphi'_n dx \wedge \vartheta_0 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} \bar{d}_{M,k} \omega. \quad (2.3.152)$$

Folglich liegt ω in $\mathcal{D}(d_{M,k,min})$. ■

2.3.6 Korollar: Unter den Voraussetzungen von Satz 2.3.5 gilt

$$\ker(\star i^* \star) = \mathcal{D}_M^*. \quad (2.3.153)$$

Beweis: Für $\omega \in \mathcal{D}(d_{M,min}^*)$ gilt mit Satz 2.3.5

$$\begin{aligned} \star i^* \star \omega &= 0 \\ \iff i^* \star \omega &= 0 \\ \iff \star \omega &\in \mathcal{D}(d_{M,min}) \\ \iff \omega &\in \mathcal{D}_M^*. \end{aligned} \quad (2.3.154)$$

Damit ist die Aussage gezeigt. ■

2.3.7 Satz: Sei M eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension m mit Rand. Dann kann das Lebesgueintegral auf ∂M

$$\int_{\partial M} : \Omega^{m-1}(\partial M) \rightarrow \mathbb{C} \quad (2.3.155)$$

durch Stetigkeit zu

$$\int_{\partial M} : H^{-\frac{1}{2}}(\wedge^{m-1} T^* \partial M) \rightarrow \mathbb{C} \quad (2.3.156)$$

verallgemeinert werden.

Beweis: Aus

$$d_{\partial M, m-1} \equiv 0 \quad (2.3.157)$$

folgt

$$\mathcal{D}_{\partial M, m-1}^{-\frac{1}{2}} = \mathbb{H}^{-\frac{1}{2}} (\wedge^{m-1} \mathbb{T}^* \partial M). \quad (2.3.158)$$

Für $\vartheta \in \mathbb{H}^{-\frac{1}{2}} (\wedge^{m-1} \mathbb{T}^* \partial M)$ gilt dann

$$\|\vartheta\|_{\mathbb{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2}}} = \|\vartheta\|_{\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}}. \quad (2.3.159)$$

Daher genügt es zu zeigen, daß für eine Folge $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega^{m-1}(\partial M)$ mit $\Gamma_{\mathbb{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2}}} \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial M} \chi_n = 0 \quad (2.3.160)$$

gilt. In Schritt 6 vom Beweis zu Satz 2.3.1 wurde ein stetiger Fortsetzungsoperator

$$T : \left(\Omega(\partial M), \|\cdot\|_{\mathbb{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2}}} \right) \rightarrow \left(\Omega(M), \|\cdot\|_{\mathbb{D}_M} \right) \quad (2.3.161)$$

konstruiert, für den

$$i^* \circ T = \text{id} \quad (2.3.162)$$

gilt. Wir setzen nun

$$\omega_n := T\chi_n. \quad (2.3.163)$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathbb{D}_M} \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n &= \Gamma_{\mathbb{D}_M} \lim_{n \rightarrow \infty} T\chi_n = \\ &= T\Gamma_{\mathbb{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2}}} \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n = 0. \end{aligned} \quad (2.3.164)$$

Daraus folgt mit dem klassischen Satz von Stokes und der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial M} \chi_n \right| &= \left| \int_{\partial M} i^* \omega_n \right| = \\ &= \left| \int_M \bar{d}_{M, m-1} \omega_n \right| \leq \\ &\leq \int_M |\bar{d}_{M, m-1} \omega_n| \leq \left(\int_M |\bar{d}_{M, m-1} \omega_n|^2 \cdot \int_M 1^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.3.165)$$

Da M als kompakt vorausgesetzt wurde, gilt

$$\int_M 1 < \infty. \quad (2.3.166)$$

Aus

$$\Gamma_{D_M^-} \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = 0 \quad (2.3.167)$$

folgt

$$\bar{d}_{M,m-1} \omega_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} 0. \quad (2.3.168)$$

Damit gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\partial M} \chi_n \right| = 0, \quad (2.3.169)$$

woraus die Behauptung folgt. ■

2.3.8 Verallgemeinerter Satz von Stokes: (nach PAQUET [11], Korollar 1.10) Unter den Voraussetzungen von Satz 2.3.7 gilt für $\omega \in \mathcal{D}_{M,m-1}$

$$\int_M D_{M,m-1} \omega = \int_{\partial M} i^* \omega. \quad (2.3.170)$$

Beweis: Sei $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega^{m-1}(M)$ eine Folge mit

$$\Gamma_{D_M^-} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0. \quad (2.3.171)$$

Dann gilt mit der Ungleichung von Cauchy–Schwarz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_M \bar{d}_{M,m-1} \mu_n \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_M |\bar{d}_{M,m-1} \mu_n|^2 \cdot \int_M 1^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0, \quad (2.3.172)$$

da

$$\int_M 1 < \infty \quad (2.3.173)$$

gilt, und aus

$$\Gamma_{D_M^-} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0 \quad (2.3.174)$$

folgt, daß

$$\bar{d}_{M,m-1} \mu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} 0 \quad (2.3.175)$$

gilt. Daher ist

$$\int_M : (\Omega^{m-1}(M), \|\cdot\|_{D_M}) \rightarrow \mathbb{C} \quad (2.3.176)$$

stetig.

Sei nun $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega^{m-1}(M)$ eine Folge mit

$$\Gamma_{\mathcal{D}_M} \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \omega \in \mathcal{D}_{M,m-1}. \quad (2.3.177)$$

Dann folgt mit dem klassischen Satz von Stokes

$$\begin{aligned} \int_M \mathcal{D}_{M,m-1} \omega &= \int_M \mathcal{D}_{M,m-1} \Gamma_{\mathcal{D}_M} \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \\ &= \int_M L^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\mathcal{d}}_{M,m-1} \omega_n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M \bar{\mathcal{d}}_{M,m-1} \omega_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial M} i^* \omega_n. \end{aligned} \quad (2.3.178)$$

Andererseits gilt mit Satz 2.3.7

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} i^* \omega &= \int_{\partial M} i^* \Gamma_{\mathcal{D}_M} \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \\ &= \int_{\partial M} \Gamma_{\mathcal{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2}}} \lim_{n \rightarrow \infty} i^* \omega_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial M} i^* \omega_n, \end{aligned} \quad (2.3.179)$$

da gemäß dem Spursatz von Paquet 2.3.1

$$i^* : (\mathcal{D}_M, \|\cdot\|_{\mathcal{D}_M}) \rightarrow \left(\mathcal{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2}}, \|\cdot\|_{\mathcal{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2}}} \right) \quad (2.3.180)$$

stetig ist. Daraus folgt die Behauptung. ■

2.3.9 Satz: Sei M eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann gibt es eine lange exakte Sequenz

$$\dots \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2}}, k-1} \xrightarrow{\kappa_{*,k-1}} \mathcal{H}_{\mathcal{D}_{M,min},k} \xrightarrow{j_{*,k}} \mathcal{H}_{\mathcal{D}_M,k} \xrightarrow{i_{*,k}^*} \mathcal{H}_{\mathcal{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2}},k} \longrightarrow \dots \quad (2.3.181)$$

Beweis: Wegen Satz 2.3.5 ist

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{d}_{M,min}) \xleftarrow{j} \mathcal{D}_M \xrightarrow{i^*} \mathcal{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2}} \longrightarrow 0 \quad (2.3.182)$$

eine kurze exakte Sequenz. j bezeichnet hier die kanonische Einbettung von $\mathcal{D}(\mathcal{d}_{M,min})$ in \mathcal{D}_M . Es ist offensichtlich, daß

$$(j \circ \mathcal{d}_{M,k,min}) \omega = (\mathcal{D}_{M,k} \circ j) \omega \quad (2.3.183)$$

für $\omega \in \mathcal{D}(d_{M,k,min})$ gilt. j ist sicherlich injektiv, und

$$i^* : \mathcal{D}_M \rightarrow \mathcal{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2}} \quad (2.3.184)$$

ist nach dem Spursatz von Paquet 2.3.1 surjektiv. Wegen Lemma 2.3.3 gilt für $\omega \in \mathcal{D}_{M,k}$ auch

$$i^* \mathcal{D}_{M,k} \omega = \mathcal{D}_{\partial M,k}^{-\frac{1}{2}} i^* \omega. \quad (2.3.185)$$

Damit sind die Voraussetzungen von Theorem 1.1.11 erfüllt, und wir erhalten die exakte Sequenz

$$\dots \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2},k-1}} \xrightarrow{\kappa_{*,k-1}} \mathcal{H}_{d_{M,min},k} \xrightarrow{j_{*,k}} \mathcal{H}_{\mathcal{D}_M,k} \xrightarrow{i_{*,k}^*} \mathcal{H}_{\mathcal{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2},k}} \longrightarrow \dots \quad (2.3.186)$$

■

2.3.10 Korollar: Unter den Voraussetzungen von Satz 2.3.9 gibt es eine exakte Sequenz

$$\dots \longrightarrow \widehat{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2},k-1}} \xrightarrow{\widehat{\kappa}_{*,k-1}} \widehat{\mathcal{H}}_{d_{M,min},k} \xrightarrow{\widehat{j}_{*,k}} \widehat{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}_M,k} \xrightarrow{\widehat{i}_{*,k}^*} \widehat{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}_{\partial M}^{-\frac{1}{2},k}} \longrightarrow \dots \quad (2.3.187)$$

Beweis: Da wegen Satz 2.1.15 und Satz 2.2.4 alle auftretenden Komplexe Fredholmkomplexe sind, folgt die Behauptung mit Korollar 1.1.12.

■

2.4 Harmonische Formen

Für den verbleibenden Teil von Kapitel 2 sei — soweit nicht ausdrücklich etwas anderes erwähnt wird — M eine kompakte orientierte zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand, die in der Nähe des Randes eine Produktmetrik

$$dx^2 \oplus g_{\partial M} \quad (2.4.1)$$

besitzt. Die Dimension von M sei m . Der Rand von M wird mit $N = \partial M$ bezeichnet. Damit ist N eine geschlossene orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $m - 1$, die mit ihrer kanonischen Einbettung in M identifiziert wird.

Bei Bezeichnungen wie $d_{X,k}$, $D_{X,k}$, $\mathcal{D}_{X,k}$, $\Delta_{X,k}$ etc. wird der Index X weggelassen, falls $X = M$ gilt.

\widetilde{M} sei die kompakte Verdopplung von M und

$$\alpha \in C^\infty(\widetilde{M}, \widetilde{M}) \quad (2.4.2)$$

die Abbildung, die die beiden Kopien von M vertauscht. \widetilde{M} ist sicherlich orientierbar. Wir wählen die von der natürlichen Einbettung

$$M \hookrightarrow \widetilde{M} \quad (2.4.3)$$

induzierte Orientierung und identifizieren M mit ihrer Einbettung in \widetilde{M} . Offenbar ist α orientierungsumkehrend, wie man sofort aus der lokalen Darstellung in einem Koordinatensystem sieht. α induziert einen beschränkten Operator

$$\alpha^* : \Omega(\widetilde{M}) \rightarrow \Omega(\widetilde{M}), \quad (2.4.4)$$

der auf $L^2(\wedge T^*\widetilde{M})$ durch Stetigkeit fortgesetzt werden kann. Auch diese Fortsetzung wird mit α^* bezeichnet. Da α eine Involution ist, ist auch α^* eine Involution.

Wie in Theorem 2.1.11 gilt

$$\alpha^* g = g, \quad (2.4.5)$$

und es gibt einen Kragen U um N in \widetilde{M} , der eine Produktmetrik

$$dx^2 \oplus g_N \quad (2.4.6)$$

trägt und bezüglich dieser zu $(-1, 1) \times N$ isometrisch ist. Wir weisen an dieser Stelle nochmals auf Satz 2.1.7 und Lemma 2.1.8 hin, die besagen, daß D_M und $D_{\widetilde{M}}$ unabhängig von den auf M und \widetilde{M} gewählten Metriken sind.

Im Falle $X = M$ wurde bei Bezeichnungen wie D_X , $\widehat{\mathcal{H}}_X$ etc. jeweils der Index X weggelassen. Falls nun $X = \widetilde{M}$ gilt, wird dies genauso gehandhabt, nur werden die Symbole zusätzlich noch mit einer Tilde versehen.

2.4.1 Lemma:

$$\alpha^* : L^2(\wedge T^*\widetilde{M}) \rightarrow L^2(\wedge T^*\widetilde{M}) \quad (2.4.7)$$

ist selbstadjungiert.

Beweis: Dies folgt sofort aus Lemma 1.2.3, da α^* nach Wahl der Metrik auf \widetilde{M} eine Isometrie ist. ■

2.4.2 Lemma:

$$\alpha^* : L^2(\wedge T^* \widetilde{M}) \rightarrow L^2(\wedge T^* \widetilde{M}) \quad (2.4.8)$$

antikommutiert mit dem Hodgeoperator auf \widetilde{M} .

Beweis: Dies ist eine direkte Anwendung von Satz 1.2.7, da α selbstadjungiert ist, wie in Lemma 2.4.1 gezeigt wurde. ■

2.4.3 Lemma: Es gilt

$$\alpha^* \widetilde{D} = \widetilde{D} \alpha^* \quad (2.4.9)$$

und

$$\alpha^* \widetilde{D}^* = \widetilde{D}^* \alpha^*. \quad (2.4.10)$$

Beweis: Dies folgt aus Satz 2.1.22 und Korollar 2.1.23. ■

2.4.4 Definition: Sei \widetilde{T} ein Differentialoperator auf \widetilde{M} . Dann wird $\widetilde{T}|_M$, die **Einschränkung** von \widetilde{T} auf M , folgendermaßen definiert:

- Genau dann gilt $\omega \in \mathcal{D}(\widetilde{T}|_M)$, wenn es ein $\widetilde{\omega} \in \mathcal{D}(\widetilde{T})$ gibt, so daß $\widetilde{\omega}|_M = \omega$ gilt.
- Es gilt dann $\widetilde{T}|_M(\omega) = (\widetilde{T}(\widetilde{\omega}))|_M$.

Damit ist $\widetilde{T}|_M$ ein wohldefinierter Differentialoperator auf M .

2.4.5 Satz: Es gilt

$$D_k = \widetilde{D}_k|_M \quad (2.4.11)$$

und

$$D_k^* \subset \widetilde{D}_k^*|_M. \quad (2.4.12)$$

Beweis: Für $\omega \in \mathcal{D}_k$ gibt es nach Theorem 2.1.11 ein $\tilde{\omega} \in \tilde{\mathcal{D}}_k$, so daß

$$\tilde{\omega}|_M = \omega \quad (2.4.13)$$

gilt. Daraus ergibt sich

$$\mathcal{D}_k \subset \tilde{\mathcal{D}}_k|_M \quad (2.4.14)$$

und

$$\mathcal{D}_k \subset \tilde{\mathcal{D}}_k|_M. \quad (2.4.15)$$

$\tilde{\mathcal{D}}_k|_M$ bezeichnet hier den Definitionsbereich von $\tilde{\mathcal{D}}_k|_M$.

Wie in Lemma 1.2.1 gezeigt wurde, zerfällt $\tilde{\mathcal{D}}_k$ in die Eigenräume $H^+ \cap \tilde{\mathcal{D}}_k$ und $H^- \cap \tilde{\mathcal{D}}_k$ zu den Eigenwerten $+1$ und -1 von α^* . Für $\omega_1 \in H^+ \cap \tilde{\mathcal{D}}_k$ gilt $\omega_1|_M \in \mathcal{D}_k$, und für $\omega_2 \in H^- \cap \tilde{\mathcal{D}}_k$ gilt — wieder nach Theorem 2.1.11 — $\omega_2|_M \in \mathcal{D}(d_{k,min}) \subset \mathcal{D}_k$. Damit folgt, daß

$$\mathcal{D}_k = \tilde{\mathcal{D}}_k|_M \quad (2.4.16)$$

und

$$\mathcal{D}_k = \tilde{\mathcal{D}}_k|_M \quad (2.4.17)$$

gelten muß.

Da $\tilde{\mathcal{M}}$ geschlossen ist, und der Hodgeoperator punktweise definiert ist, ergibt sich mit Korollar 2.1.10 aus Lemma 2.1.5

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}_k^*|_M &= (-1)^{mk+1} \left(\star \tilde{\mathcal{D}}_{m-k-1} \star \right)|_M = \\ &= (-1)^{mk+1} \star \tilde{\mathcal{D}}_{m-k-1}|_M \star = \\ &= (-1)^{mk+1} \star \mathcal{D}_{m-k-1} \star \supset \\ &\supset (-1)^{mk+1} \star d_{m-k-1,min} \star = \mathcal{D}_k^*. \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

Das ist aber gerade die zweite Behauptung. ■

Bemerkung: Im allgemeinen gilt nicht

$$D_k^* = \widetilde{D}_k^* \Big|_M. \quad (2.4.19)$$

Ein Gegenbeispiel ist etwa $M = [0, 1]$, $k = 0$. Dann gilt offenbar

$$\widetilde{M} \simeq S^1 \quad (2.4.20)$$

und

$$\Omega^1(\widetilde{M}) \subset \widetilde{\mathcal{D}}_0^*. \quad (2.4.21)$$

Andererseits ist

$$D_0^* = - \star d_{0, \min} \star, \quad (2.4.22)$$

also

$$\mathcal{D}_0^* = \{ f \, d\text{vol}([0, 1]) \mid f \in \text{AC}([0, 1]), f(0) = f(1) = 0 \}. \quad (2.4.23)$$

Dabei bezeichnet $\text{AC}([0, 1])$ die Menge der absolutstetigen Funktionen auf $[0, 1]$. Es gilt etwa

$$d\text{vol}([0, 1]) \notin \mathcal{D}_0^*, \quad (2.4.24)$$

aber

$$d\text{vol}(\widetilde{M}) \in \Omega^1(\widetilde{M}) \subset \widetilde{\mathcal{D}}_0^*, \quad (2.4.25)$$

also

$$d\text{vol}([0, 1]) = d\text{vol}(\widetilde{M}) \Big|_{[0, 1]} \in \widetilde{\mathcal{D}}_0^* \Big|_{[0, 1]}. \quad (2.4.26)$$

2.4.6 Lemma: α^* kommutiert mit $\widetilde{\Delta}$.

Beweis: Dies folgt sofort aus der Definition von $\widetilde{\Delta}$ und Lemma 2.4.3. ■

2.4.7 Satz: Es gilt

$$\widehat{\mathcal{H}}_k \subset \widetilde{\mathcal{H}}_k \Big|_M. \quad (2.4.27)$$

Beweis: Sei β wie im Beweis zu Theorem 2.1.11 definiert. Wähle ein beliebiges $\omega \in \widehat{\mathcal{H}}_k$ und setze

$$\tilde{\omega} := \beta\omega. \quad (2.4.28)$$

Dann gilt für $p \in M$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_k \tilde{\omega}(p) &= D_k \omega(p) = 0, \\ \tilde{D}_k^* \tilde{\omega}(p) &= D_k^* \omega(p) = 0 \end{aligned} \quad (2.4.29)$$

und für $p \in \alpha(M)$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_k \tilde{\omega}(p) &= \tilde{D}_k \alpha^* \omega(p) = \alpha^* \tilde{D}_k \omega(p) = \alpha^* D_k \omega(p) = 0, \\ \tilde{D}_{k-1}^* \tilde{\omega}(p) &= \tilde{D}_{k-1}^* \alpha^* \omega(p) = \alpha^* \tilde{D}_{k-1}^* \omega(p) = \alpha^* D_{k-1}^* \omega(p) = 0, \end{aligned} \quad (2.4.30)$$

da wegen Satz 2.4.5

$$D = \tilde{D} \Big|_M \quad (2.4.31)$$

und

$$D^* \subset \tilde{D}^* \Big|_M \quad (2.4.32)$$

ist. Daher liegt ω in $\tilde{\mathcal{H}}_k \Big|_M$. ■

Bemerkung: Gleichheit kann hier natürlich im allgemeinen nicht gelten. Um das zu sehen, wählen wir M als das abgeschlossene Intervall $[0, 1]$ und $k = 1$. Wegen

$$\ker d_{0,min} = 0 \quad (2.4.33)$$

gibt es keine nichttrivialen harmonischen 1-Formen auf M . Aber es gilt

$$\tilde{M} \simeq S^1, \quad (2.4.34)$$

und daher erhalten wir

$$\dim \tilde{\mathcal{H}}_1 = 1. \quad (2.4.35)$$

Es gilt insbesondere

$$d\text{vol}(\tilde{M}) \in \tilde{\mathcal{H}}_1 \quad \text{und} \quad d\text{vol}(\tilde{M}) \Big|_{[0,1]} \neq 0. \quad (2.4.36)$$

2.4.8 Theorem: Es gilt

$$\widehat{\mathcal{H}}_k \subset \Omega^k(M). \quad (2.4.37)$$

Beweis: Da $\widetilde{\Delta}$ elliptisch ist (vgl. Lemma 2.1.14), gilt

$$\widetilde{\mathcal{H}}_k = \ker \widetilde{\Delta}_k \subset \Omega^k(\widetilde{M}). \quad (2.4.38)$$

Demnach folgt mit Satz 2.4.7 und Lemma 2.1.18, daß

$$\widehat{\mathcal{H}}_k \subset \widetilde{\mathcal{H}}_k \Big|_M \subset \Omega^k(\widetilde{M}) \Big|_M = \Omega^k(M) \quad (2.4.39)$$

gilt. ■

Bemerkung: Theorem 2.4.8 sagt insbesondere aus, daß harmonische Formen über M auch auf dem Rand von M glatt sind.

2.5 Randwertprobleme

Wir wollen zu vorgegebenem η auf M und vorgegebenem χ auf N ein ω suchen, so daß

$$D\omega = \eta \quad \text{und} \quad i^*\omega = \chi \quad (2.5.1)$$

gilt. Dank der bislang erarbeiteten Resultate sind wir in der Lage, eine Lösung für dieses Problem anzugeben.

Wir betrachten zunächst den homogenen Fall $\eta = 0$.

2.5.1 Satz: Sei $\chi \in H^{-\frac{1}{2}}(\wedge^k T^*N)$ gegeben. Es gibt genau dann ein $\omega \in \ker D_k$ für das

$$i^*\omega = \chi \quad (2.5.2)$$

gilt, wenn

$$\chi = i^*\gamma + D_{N,k-1}^{-\frac{1}{2}}\varrho \quad (2.5.3)$$

mit $\gamma \in \widehat{\mathcal{H}}_k$ und $\varrho \in \mathcal{D}_{N,k-1}^{-\frac{1}{2}}$ gilt.

Beweis: Da gemäß der Hodgerzerlegung 1.1.8

$$\ker D = \widehat{\mathcal{H}} \oplus \operatorname{im} D \quad (2.5.4)$$

gilt, ist es offensichtlich, daß das Problem genau dann lösbar ist, wenn

$$\chi = i^* \gamma + i^* D_{k-1} \nu \quad (2.5.5)$$

mit $\gamma \in \widehat{\mathcal{H}}_k$ und $\nu \in \mathcal{D}_{k-1}$ gilt. Man kann dann nämlich

$$\omega := \gamma + \nu \quad (2.5.6)$$

setzen. Nun gilt aber mit Lemma 2.3.3

$$i^* D_{k-1} \nu = D_{N,k-1}^{-\frac{1}{2}} i^* \nu. \quad (2.5.7)$$

Daraus folgt

$$i^* \operatorname{im} D_{k-1} \subset \operatorname{im} D_{N,k-1}^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.5.8)$$

Da

$$i^* : \mathcal{D}_{k-1} \rightarrow \mathcal{D}_{N,k-1}^{-\frac{1}{2}} \quad (2.5.9)$$

nach dem Spursatz von Paquet 2.3.1 surjektiv ist, gibt es für jedes $\varrho \in \mathcal{D}_{N,k-1}^{-\frac{1}{2}}$ ein $\mu \in \mathcal{D}_{k-1}$ mit

$$i^* \mu = \varrho. \quad (2.5.10)$$

Es folgt

$$D_{N,k-1}^{-\frac{1}{2}} \varrho = D_{N,k-1}^{-\frac{1}{2}} i^* \mu = i^* D_{k-1} \mu. \quad (2.5.11)$$

Zusammen mit Formel (2.5.8) erhalten wir also

$$i^* \operatorname{im} D_{k-1} = \operatorname{im} D_{N,k-1}^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.5.12)$$

■

Wir betrachten nun den inhomogenen Fall $\eta \in \operatorname{im} D_k$.

2.5.2 Korollar: Seien $\chi \in H^{-\frac{1}{2}}(\wedge^k T^* N)$ und

$$\eta = D_k \vartheta \in \operatorname{im} D_k \quad (2.5.13)$$

mit $\vartheta \in \mathcal{D}_k$ gegeben. Dann gibt es genau dann ein $\omega \in \mathcal{D}_k$ mit

$$D_k \omega = \eta \quad \text{und} \quad i^* \omega = \chi, \quad (2.5.14)$$

wenn

$$\chi = i^* \gamma + i^* \vartheta + D_{N,k-1}^{-\frac{1}{2}} \varrho \quad (2.5.15)$$

mit $\gamma \in \widehat{\mathcal{H}}_k$ und $\varrho \in \mathcal{D}_{N,k-1}^{-\frac{1}{2}}$ gilt.

Beweis: Es gibt genau dann ein solches ω , wenn

$$\omega - \vartheta \in \ker D_k \quad \text{und} \quad i^*(\omega - \vartheta) = \chi - i^*\vartheta \quad (2.5.16)$$

gilt. Damit sind aber gerade die Voraussetzungen von Satz 2.5.1 erfüllt. Das Problem ist also genau dann lösbar, wenn

$$\chi - i^*\vartheta = i^*\gamma + D_{N,k-1}^{-\frac{1}{2}}\varrho \quad (2.5.17)$$

mit $\gamma \in \widehat{\mathcal{H}}_k$ und $\varrho \in \mathcal{D}_{N,k-1}^{-\frac{1}{2}}$ gilt. ■

Bemerkung: Falls es für Korollar 2.5.2 eine Lösung ω gibt, ist diese im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Sei etwa $\nu \in \ker d_{k,min}$. Dann gilt

$$D_k(\omega + \nu) = D_k\omega. \quad (2.5.18)$$

Aus Satz 2.3.5 folgt

$$i^*\nu = 0 \quad (2.5.19)$$

und damit

$$i^*(\omega + \nu) = i^*\omega. \quad (2.5.20)$$

2.5.3 Satz: Seien $\chi \in H^{-\frac{1}{2}}(\wedge^k T^*N)$ und $\eta \in L^2(\wedge^{k+1} T^*M)$ gegeben. Dann gibt es genau dann ein $\omega \in \mathcal{D}_k$ mit

$$D_k\omega = \eta \quad \text{und} \quad i^*\omega = \chi, \quad (2.5.21)$$

wenn $\chi \in \mathcal{D}_{N,k}^{-\frac{1}{2}}$, $\eta \in \ker D_{k+1}$ und

$$i^*\eta = D_{N,k}^{-\frac{1}{2}}\chi \quad (2.5.22)$$

gilt, und wenn für alle $\nu \in \widehat{\mathcal{H}}_{m-k-1}$

$$(\eta \mid \star\nu)_{L^2} = (-1)^{(m-1)\cdot(k-1)} \int_N \chi \wedge i^*\bar{\nu} \quad (2.5.23)$$

gilt. Der Ausdruck $\int_N \chi \wedge i^*\bar{\nu}$ ist wegen Satz 2.3.7 wohldefiniert.

Beweis: Wir nehmen zunächst an, daß es eine Lösung ω gibt. Dann gilt sicherlich

$$\eta \in \text{im } D_k \subset \ker D_{k+1} \quad (2.5.24)$$

und

$$\chi \in \mathcal{D}_{N,k}^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.5.25)$$

wie man aufgrund des Spursatzes von Paquet 2.3.1 sieht. Aus Lemma 2.3.3 folgt

$$i^* \eta = i^* D_k \omega = D_{N,k}^{-\frac{1}{2}} i^* \omega = D_{N,k}^{-\frac{1}{2}} \chi. \quad (2.5.26)$$

Für $\nu \in \widehat{\mathcal{H}}_{m-k-1}$ folgt mit dem verallgemeinerten Satz von Stokes 2.3.8

$$\begin{aligned} (\eta \mid \star \nu)_{L^2} &= (-1)^{(k+1) \cdot (m-k-1)} \int_M \eta \wedge \bar{\nu} = \\ &= (-1)^{(m-1) \cdot (k-1)} \int_M D_k \omega \wedge \bar{\nu} = \\ &= (-1)^{(m-1) \cdot (k-1)} \int_M D_{m-1} (\omega \wedge \bar{\nu}) = \\ &= (-1)^{(m-1) \cdot (k-1)} \int_N i^* (\omega \wedge \bar{\nu}) = \\ &= (-1)^{(m-1) \cdot (k-1)} \int_N i^* \omega \wedge i^* \bar{\nu} = \\ &= (-1)^{(m-1) \cdot (k-1)} \int_N \chi \wedge i^* \bar{\nu}. \end{aligned} \quad (2.5.27)$$

Sei nun vorausgesetzt, daß die angegebenen Bedingungen erfüllt sind. Wir betrachten zunächst den Fall $\eta = 0$.

Da gemäß dem Spursatz von Paquet 2.3.1

$$i^* : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}_N^{-\frac{1}{2}} \quad (2.5.28)$$

surjektiv ist, können wir ein $\mu \in \mathcal{D}_k$ wählen, so daß

$$i^* \mu = \chi \quad (2.5.29)$$

gilt. Dann folgt für jedes $\nu \in \widehat{\mathcal{H}}_{m-k-1}$

$$\begin{aligned}
0 &= \int_N \chi \wedge i^* \bar{\nu} = \\
&= \int_N i^* \mu \wedge i^* \bar{\nu} = \\
&= \int_N i^* (\mu \wedge \bar{\nu}) = \\
&= \int_M D_{m-1} (\mu \wedge \bar{\nu}) = \\
&= \int_M D_k \mu \wedge \bar{\nu} = (D_k \mu \mid \star \nu)_{L^2}.
\end{aligned} \tag{2.5.30}$$

Daraus folgt

$$D_k \mu \perp_{L^2} \widehat{\mathcal{H}}_{\text{dmin}, k+1}, \tag{2.5.31}$$

weil

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\text{dmin}, k+1} = \star \widehat{\mathcal{H}}_{m-k-1} \tag{2.5.32}$$

gilt. Da χ geschlossen ist, wird durch χ eine Äquivalenzklasse in

$$\ker D_N^{-\frac{1}{2}} / \text{im } D_N^{-\frac{1}{2}} \tag{2.5.33}$$

repräsentiert. Mit dem in Satz 2.3.9 eingeführten κ_* gilt daher

$$\kappa_{*,k} [\chi] = 0, \tag{2.5.34}$$

wobei $[\chi]$ hier die Äquivalenzklasse von χ modulo im $D_N^{-\frac{1}{2}}$ bezeichnet. Damit erhalten wir mit Satz 2.3.9 wegen der Exaktheit der dort diskutierten Sequenz

$$[\chi] = i_{*,k}^* [\gamma] \tag{2.5.35}$$

mit einem geeigneten $\gamma \in \widehat{\mathcal{H}}_k$. Das heißt anders ausgedrückt

$$\chi = i^* \gamma + D_{N,k-1}^{-\frac{1}{2}} \varrho \tag{2.5.36}$$

mit $\varrho \in \mathcal{D}_{N,k-1}^{-\frac{1}{2}}$. Daraus folgt mit Satz 2.5.1, daß es eine Lösung ω des Problems gibt.

Sei nun $\eta \in \ker D_{k+1}$ beliebig gegeben. Zu χ wählen wir ein $\mu \in \mathcal{D}_k$, für das

$$i^* \mu = \chi \quad (2.5.37)$$

gilt. Wegen

$$i^* D_k \mu = D_{N,k}^{-\frac{1}{2}} i^* \mu = D_{N,k}^{-\frac{1}{2}} \chi \quad (2.5.38)$$

muß für jedes $\nu \in \widehat{\mathcal{H}}_{m-k-1}$

$$(D_k \mu \mid \star \nu)_{L^2} = (-1)^{(m-1) \cdot (k-1)} \int_N \chi \wedge i^* \bar{\nu} \quad (2.5.39)$$

gelten. Daher gilt für

$$\varphi := \eta - D_k \mu \in \ker D_{k+1} \quad (2.5.40)$$

zum einen

$$(\varphi \mid \star \nu)_{L^2} = 0 \quad (2.5.41)$$

für jedes $\nu \in \widehat{\mathcal{H}}_{m-k-1}$, woraus

$$\varphi \perp_{L^2} \widehat{\mathcal{H}}_{min,k+1} \quad (2.5.42)$$

folgt. Zum anderen gilt

$$i^* \varphi = 0. \quad (2.5.43)$$

Daher gilt wegen Satz 2.3.5

$$\varphi \in \ker d_{k+1,min}. \quad (2.5.44)$$

Aus Formel (2.5.42) und Formel (2.5.44) folgt mit der Hodgezerlegung bezüglich $(\mathcal{D}(d_{min}), d_{min})$

$$\varphi \in \text{im } d_{k,min}. \quad (2.5.45)$$

Daher erhalten wir

$$\eta = D_k \mu + \varphi \in \text{im } D_k + \text{im } d_{k,min} = \text{im } D_k. \quad (2.5.46)$$

Dann gilt Formel (2.5.23) genau dann, wenn mit jedem $\vartheta \in \mathcal{D}_k$ für das

$$D_k \vartheta = \eta \quad (2.5.47)$$

gilt

$$\int_N (\chi - i^* \vartheta) \wedge i^* \bar{\nu} = 0 \quad (2.5.48)$$

ist, weil

$$\begin{aligned} \int_N i^* \vartheta \wedge i^* \bar{\nu} &= \int_N i^* (\vartheta \wedge \bar{\nu}) = \\ &= \int_M D_{m-1} (\vartheta \wedge \bar{\nu}) = \\ &= \int_M D_k \vartheta \wedge \bar{\nu} = (-1)^{(m-1) \cdot (k-1)} (\eta \mid \star \nu)_{L^2} \end{aligned} \quad (2.5.49)$$

gilt. Aus

$$i^* \eta = D_{N,k}^{-\frac{1}{2}} \chi \quad (2.5.50)$$

folgt

$$\chi - i^* \vartheta \in \ker D_{N,k}^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.5.51)$$

weil

$$D_{N,k}^{-\frac{1}{2}} i^* \vartheta = i^* D_k \vartheta = i^* \eta = D_{N,k}^{-\frac{1}{2}} \chi \quad (2.5.52)$$

gilt. Wie wir soeben bewiesen haben, gibt es dann ein $\psi \in \ker D_k$ mit

$$i^* \psi = \chi - i^* \vartheta. \quad (2.5.53)$$

Eine Lösung des ursprünglichen Problems ist dann sicherlich

$$\omega := \psi + \vartheta. \quad (2.5.54)$$

■

Bemerkung: Seien $\chi \in \mathcal{D}_{N,k}^{-\frac{1}{2}}$ und $\eta \in \text{im } D_k$ gegeben. Wenn für alle $\nu \in \widehat{\mathcal{H}}_{m-k-1}$

$$(\eta \mid \star \nu)_{L^2} = (-1)^{(m-1) \cdot (k-1)} \int_N \chi \wedge i^* \bar{\nu} \quad (2.5.55)$$

gilt, muß es trotzdem kein $\omega \in \mathcal{D}_k$ mit

$$D_k \omega = \eta \quad \text{und} \quad i^* \omega = \chi \quad (2.5.56)$$

geben. Das heißt, daß die Bedingung aus Formel (2.5.22) in Satz 2.5.3 nicht redundant ist.

Betrachte etwa

$$M = [0, 1] \times S^1 \quad (2.5.57)$$

und $k = 0$. Wir wählen ein beliebiges aber nicht konstantes

$$f \in C^\infty(S^1). \quad (2.5.58)$$

Mit $\eta \equiv 0$ und

$$\chi(0, p) = \chi(1, p) = f(p) \quad (2.5.59)$$

für $p \in S^1$ gilt

$$(\eta \mid \star \nu)_{L^2} = \int_N \chi \wedge i^* \bar{\nu} = 0 \quad (2.5.60)$$

für jedes $\nu \in \widehat{\mathcal{H}}_1$, da

$$\widehat{\mathcal{H}}_1 = \{ \lambda \cdot dp \mid \lambda \in \mathbb{C} \} \quad (2.5.61)$$

gilt. Andererseits gilt aber

$$0 = i^* \eta \neq d_{N,0} \chi, \quad (2.5.62)$$

da f nicht konstant ist. Daher ist die Bedingung aus Formel (2.5.22) nicht erfüllt, und es gibt gemäß Satz 2.5.3 kein $\omega \in \ker D_0$, für das

$$i^* \omega = \chi \quad (2.5.63)$$

gilt.

2.5.4 Korollar: Unter den Voraussetzungen von Satz 2.5.3 gibt es genau dann eine Lösung ω für das dort diskutierte Problem, wenn $\chi \in \mathcal{D}_{N,k}^{-\frac{1}{2}}$, $\eta \in \ker D_{k+1}$ und

$$i^* \eta = D_{N,k}^{-\frac{1}{2}} \chi \quad (2.5.64)$$

gilt, und wenn für alle $\varphi \in \widehat{\mathcal{H}}_{d_{min},k+1}$

$$(\eta \mid \varphi)_{L^2} = \int_N \chi \wedge i^* \star \bar{\varphi} \quad (2.5.65)$$

gilt.

Beweis: Wegen

$$\widehat{\mathcal{H}}_{m-k-1} = \star \widehat{\mathcal{H}}_{d_{min}, k+1} \quad (2.5.66)$$

kann Formel (2.5.23) mit

$$\varphi = \star \nu \quad (2.5.67)$$

zu Formel (2.5.65) umgeformt werden. ■

2.5.5 Lemma: Seien $\chi \in H^{-\frac{1}{2}}(\wedge^{m-1}T^*N)$ und $\eta \in L^2(\wedge^m T^*M)$ gegeben. Dann gibt es genau dann ein $\omega \in \mathcal{D}_{m-1}$ mit

$$D_{m-1}\omega = \eta \quad \text{und} \quad i^*\omega = \chi, \quad (2.5.68)$$

wenn

$$\int_M \eta = \int_N \chi \quad (2.5.69)$$

gilt.

Beweis: Wegen

$$D_m \equiv 0 \quad (2.5.70)$$

gilt

$$\eta \in L^2(\wedge^m T^*M) = \ker D_m. \quad (2.5.71)$$

Da

$$d_{N, m-1} \equiv 0 \quad (2.5.72)$$

ist, gilt

$$\mathcal{D}_{N, m-1}^{-\frac{1}{2}} = H^{-\frac{1}{2}}(\wedge^{m-1}T^*N). \quad (2.5.73)$$

Daher liegt χ in $\mathcal{D}_{N, m-1}^{-\frac{1}{2}}$. Außerdem gilt

$$i^*\eta = 0 = D_{N, m-1}^{-\frac{1}{2}}\chi. \quad (2.5.74)$$

Da ν genau dann in $\widehat{\mathcal{H}}_0$ liegt, wenn es von der Form

$$\nu \equiv \lambda \quad (2.5.75)$$

mit $\lambda \in \mathbb{C}$ ist, vereinfacht sich Formel (2.5.23) aus Satz 2.5.3 im Fall

$$k = m - 1 \quad (2.5.76)$$

zu

$$\bar{\lambda} \int_M \eta = \bar{\lambda} \int_N \chi. \quad (2.5.77)$$

Dies ist äquivalent zu

$$\int_M \eta = \int_N \chi, \quad (2.5.78)$$

da $\lambda \in \mathbb{C}$ beliebig — also insbesondere ungleich 0 — gewählt werden darf. ■

Das Problem, das uns eigentlich interessiert, ist der Spezialfall

$$\chi \in L^2(\wedge^k T^*N) \quad (2.5.79)$$

von Korollar 2.5.2.

Bemerkung: Zu $\chi \in \mathcal{D}_{N,k}^{-\frac{1}{2}}$ und $\eta \in \text{im } D_k$ mit

$$i^* \eta = D_{N,k}^{-\frac{1}{2}} \chi \quad (2.5.80)$$

muß es im allgemeinen kein $\omega \in \mathcal{D}_k$ mit

$$D_k \omega = \eta \quad \text{und} \quad i^* \omega = \chi \quad (2.5.81)$$

geben, auch wenn die oben angegebene Bedingung an χ und η im Falle der Existenz eines solchen ω notwendigerweise erfüllt sein muß, wie in Satz 2.5.3 gezeigt wird. Um das zu sehen genügt es sogar, sich auf die Situation von Lemma 2.5.5 zu beschränken.

Wir nehmen etwa an, daß $N = \partial M$ nicht leer ist und betrachten

$$\eta = 0 \quad \text{und} \quad \chi = \text{dvol}(N), \quad (2.5.82)$$

die Volumenform auf dem Rand von M . Dann gilt

$$d_{N,m-1}\chi = i^*\eta = 0. \quad (2.5.83)$$

Die Bedingung aus Formel (2.5.80) ist also erfüllt. Falls es ein $\omega \in \ker D_{m-1}$ mit

$$i^*\omega = \chi \quad (2.5.84)$$

gäbe, würde mit Lemma 2.5.5

$$0 = \int_N \chi \quad (2.5.85)$$

folgen. Es gilt aber

$$\int_N \chi = \int_N \text{dvol}(N) > 0, \quad (2.5.86)$$

da wir $N \neq \emptyset$ angenommen hatten. Daher gibt es kein solches ω .

2.5.6 Lemma: Seien $\chi \in L^2(\wedge^k T^*N)$ und $\eta \in \text{im } D_k$ gegeben. Dann gibt es genau dann ein $\omega \in \mathcal{D}_k$ mit

$$D_k\omega = \eta \quad \text{und} \quad i^*\omega = \chi, \quad (2.5.87)$$

wenn es ein $\vartheta \in \mathcal{D}_k$ mit

$$D_k\vartheta = \eta \quad \text{und} \quad i^*\vartheta \in L^2(\wedge^k T^*N) \quad (2.5.88)$$

gibt und für jedes solche ϑ

$$\chi = i^*\gamma + i^*\vartheta + D_{N,k-1}\varrho \quad (2.5.89)$$

mit $\gamma \in \widehat{\mathcal{H}}_k$ und $\varrho \in \mathcal{D}_{N,k}$ gilt.

Beweis: Wegen Korollar 2.5.2 ist klar, daß die angegebenen Bedingungen hinreichend für die Existenz einer Lösung sind. Falls es nun eine Lösung $\omega \in \mathcal{D}_k$ gibt, so gilt

$$D_k\omega = \eta \quad \text{und} \quad i^*\omega = \chi \in L^2(\wedge^k T^*N). \quad (2.5.90)$$

Daher stellt Formel (2.5.88) eine notwendige Bedingung dar.

Für jedes ϑ , für das Formel (2.5.88) gilt, kann χ gemäß Formel (2.5.15) zerlegt werden. Da χ , $i^*\gamma$ und $i^*\vartheta$ L^2 -Formen sind, liegt auch $D_{N,k-1}^{-\frac{1}{2}}\varrho$ in $L^2(\wedge^k T^*N)$. Wegen Lemma 2.2.10 kann ϱ in $\mathcal{D}_{N,k-1}$ gewählt werden. Damit ist auch Formel (2.5.89) notwendig. ■

Bemerkung: Eine Lösung des Problems aus Lemma 2.5.6 ist im allgemeinen nicht eindeutig. Analog zur Bemerkung nach Korollar 2.5.2 kann nämlich zu einer Lösung ein Element aus

$$\ker d_{k,min} = \ker i^* \cap \ker D_k \quad (2.5.91)$$

addiert werden, ohne den Lösungsraum zu verlassen.

2.5.7 Lemma: Seien $\eta \in \text{im } \bar{d}_k$ und $\chi \in \Omega^k(N)$ gegeben. Falls es ein $\omega \in \mathcal{D}_k$ gibt, für das

$$D_k\omega = \eta \quad \text{und} \quad i^*\omega = \chi \quad (2.5.92)$$

gilt, kann ω sogar C^∞ gewählt werden.

Beweis: Sei $\vartheta \in \Omega^k(M)$ mit

$$\bar{d}_k\vartheta = \eta \quad (2.5.93)$$

gegeben. Falls es ein $\omega \in \mathcal{D}_k$ mit den gewünschten Eigenschaften gibt, gibt es wegen Lemma 2.5.6 ein $\gamma \in \widehat{\mathcal{H}}_k$ und ein $\varrho \in \mathcal{D}_{N,k-1}$, so daß

$$\chi = i^*\gamma + i^*\vartheta + D_{N,k-1}\varrho \quad (2.5.94)$$

gilt. Da χ , $i^*\vartheta$ und $i^*\gamma$ C^∞ -Formen sind, gilt $D_{N,k-1}\varrho \in \Omega^k(N)$. Wegen Lemma 2.1.17 kann $\varrho \in \Omega^{k-1}(N)$ gewählt werden. ϱ kann nun beliebig aber glatt zu $\nu \in \Omega^{k-1}(M)$ fortgesetzt werden. Dann gilt für

$$\omega := \gamma + \vartheta + \bar{d}_{k-1}\nu \in \Omega^k(M) \quad (2.5.95)$$

$$\bar{d}_k\omega = \bar{d}_k\vartheta = \eta \quad (2.5.96)$$

und

$$\begin{aligned} i^*\omega &= i^*\gamma + i^*\vartheta + i^*\bar{d}_{k-1}\nu = \\ &= i^*\gamma + i^*\vartheta + d_{N,k-1}i^*\nu = \\ &= i^*\gamma + i^*\vartheta + d_{N,k-1}\varrho = \chi. \end{aligned} \quad (2.5.97)$$

■

2.5.8 Korollar: Seien $\eta \in L^2(\wedge^{k-1}T^*M)$ und $\chi \in L^2(\wedge^{k-1}T^*N)$ gegeben. Es gibt genau dann ein $\omega \in \mathcal{D}(d_{k-1,min}^*)$ mit

$$d_{k-1,min}^*\omega = \eta \quad \text{und} \quad \star i^* \star \omega = \chi, \quad (2.5.98)$$

wenn $\eta \in \text{im } d_{k-1,min}^*$ gilt, und wenn ein $\vartheta \in \mathcal{D}(d_{k-1,min}^*)$ mit

$$d_{k-1,min}^*\vartheta = \eta \quad \text{und} \quad i^* \star \vartheta \in L^2(\wedge^{m-k}T^*N) \quad (2.5.99)$$

existiert, und für jedes solche ϑ

$$\star \chi = i^* \gamma + (-1)^{m(k-1)} i^* \star \vartheta + D_{N,m-k-1} \varrho \quad (2.5.100)$$

mit $\gamma \in \widehat{\mathcal{H}}_{m-k}$ und $\varrho \in \mathcal{D}_{N,m-k-1}$ gilt.

Beweis: Die Frage nach der Existenz eines solchen ω ist äquivalent zu der Frage nach der Existenz eines $\omega \in \mathcal{D}(d_{k-1,min}^*)$ mit

$$D_{m-k} \star \omega = (-1)^k \star \eta \quad \text{und} \quad i^* \star \omega = (-1)^{m(k-1)} \star \chi. \quad (2.5.101)$$

Gemäß Lemma 2.5.6 gibt es genau dann ein solches ω , wenn für jedes $\vartheta_1 \in \mathcal{D}_{m-k}$ mit

$$D_{m-k} \vartheta_1 = (-1)^k \star \eta \quad (2.5.102)$$

und $i^* \vartheta_1 \in L^2(\wedge^{m-k}T^*N)$

$$(-1)^{m(k-1)} \star \chi = i^* \gamma_1 + i^* \vartheta_1 + D_{N,m-k-1} \varrho_1 \quad (2.5.103)$$

mit $\gamma_1 \in \widehat{\mathcal{H}}_{m-k}$ und $\varrho_1 \in \mathcal{D}_{N,m-k-1}$ gilt und es mindestens ein solches ϑ_1 gibt. Wir dürfen insbesondere

$$\vartheta_1 = \star \vartheta \quad (2.5.104)$$

setzen. Mit

$$\gamma = (-1)^{m(k-1)} \gamma_1 \quad (2.5.105)$$

und

$$\varrho = (-1)^{m(k-1)} \varrho_1 \quad (2.5.106)$$

erhalten wir die gewünschte Aussage. Eine Lösung ist dann etwa

$$\omega = (-1)^{m-k} \star \gamma + \vartheta + (-1)^{m-k} \star D_{m-k-1} \tilde{\varrho}, \quad (2.5.107)$$

wobei $\tilde{\varrho} \in \mathcal{D}_{m-k-1}$ so gewählt ist, daß

$$i^* \tilde{\varrho} = \varrho \quad (2.5.108)$$

gilt, was aufgrund des Spursatzes von Paquet 2.3.1 möglich ist. ■

2.5.9 Korollar: Es gibt genau dann ein $\omega \in \mathcal{D}(\mathfrak{d}_{k-1, \min}^*)$ wie in Korollar 2.5.8, wenn $\eta \in \ker \mathfrak{d}_{k-2, \min}^*$, $\star\chi \in \mathcal{D}_{N, m-k}^{-\frac{1}{2}}$ und

$$\star i^* \star \eta = (-1)^{(m-1) \cdot (k-1) - 1} \star D_{N, m-k}^{-\frac{1}{2}} \star \chi \quad (2.5.109)$$

gilt, und wenn für alle $\nu \in \widehat{\mathcal{H}}_{k-1}$

$$(\eta \mid \nu)_{L^2} = - \int_N \chi \wedge \star i^* \bar{\nu} \quad (2.5.110)$$

gilt.

Beweis: Wie bereits im Beweis zu Korollar 2.5.8 erwähnt, ist es äquivalent, die Existenz eines $\omega \in \mathcal{D}(\mathfrak{d}_{k-1, \min}^*)$ mit

$$D_{m-k} \star \omega = (-1)^k \star \eta \quad \text{und} \quad i^* \star \omega = (-1)^{m(k-1)} \star \chi \quad (2.5.111)$$

zu diskutieren. Gemäß Satz 2.5.3 gibt es genau dann ein solches ω , wenn $\star\eta \in \ker D_{m-k+1}$, $\star\chi \in \mathcal{D}_{N, m-k}^{-\frac{1}{2}}$ und

$$(-1)^k i^* \star \eta = (-1)^{m(k-1)} D_{N, m-k}^{-\frac{1}{2}} \star \chi \quad (2.5.112)$$

gilt, und wenn für alle $\nu \in \widehat{\mathcal{H}}_{k-1}$

$$\begin{aligned} (-1)^k (\eta \mid \nu)_{L^2} &= (-1)^k (\star\eta \mid \star\nu)_{L^2} = \\ &= (-1)^{m(k-1)} \cdot (-1)^{(m-1) \cdot (m-k-1)} \int_N \star\chi \wedge i^* \bar{\nu} = \\ &= (-1)^{k-1} \int_N \chi \wedge \star i^* \bar{\nu} \end{aligned} \quad (2.5.113)$$

gilt. Damit folgt die Behauptung. ■

2.5.10 Satz: Seien $\eta_1 \in \text{im } D_k$, $\eta_2 \in \text{im } \mathfrak{d}_{k-1, \min}^*$, $\chi_1 \in L^2(\wedge^k T^*N)$ und $\chi_2 \in L^2(\wedge^{k-1} T^*N)$ gegeben. Es gibt genau dann ein $\omega \in \mathcal{D}_k \cap \mathcal{D}(\mathfrak{d}_{k-1, \min}^*)$ mit

$$\begin{aligned} D_k \omega &= \eta_1 & i^* \omega &= \chi_1 \\ \mathfrak{d}_{k-1, \min}^* \omega &= \eta_2 & \star i^* \star \omega &= \chi_2, \end{aligned} \quad (2.5.114)$$

wenn es ein $\omega_1 \in \mathcal{D}_k$ mit

$$D_k \omega_1 = \eta_1 \quad \text{und} \quad i^* \omega_1 = \chi_1 \quad (2.5.115)$$

und ein $\omega_2 \in \mathcal{D}(d_{k-1, \min}^*)$ mit

$$d_{k-1, \min}^* \omega_2 = \eta_2 \quad \text{und} \quad \star i^* \star \omega_2 = \chi_2 \quad (2.5.116)$$

gibt, und wenn für alle $\nu \in \ker A_k$ die Gleichung

$$\begin{aligned} & \int_N \chi_1 \wedge i^* \star D_k \nu - (\eta_1 \mid D_k \nu)_{L^2} = \\ & = (-1)^{m \cdot (k-1)} \int_N \chi_2 \wedge \star i^* d_{k-1, \min}^* \nu + (\eta_2 \mid d_{k-1, \min}^* \nu)_{L^2} \end{aligned} \quad (2.5.117)$$

gilt, wobei

$$A_k := d_{k, \min}^* D_k + D_{k-1} d_{k-1, \min}^* \quad (2.5.118)$$

ist. Wann es geeignete Formen ω_1 und ω_2 gibt, wird in Lemma 2.5.6 bzw. Satz 2.5.3 und Korollar 2.5.8 bzw. Korollar 2.5.9 diskutiert.

Beweis: Wir nehmen zunächst an, daß die Bedingungen aus den Formeln (2.5.115), (2.5.116) und (2.5.117) erfüllt sind. Dann gilt für $\nu \in \ker A_k$

$$\begin{aligned} & (\omega_1 \mid d_{k, \min}^* D_k \nu)_{L^2} = (-1)^{k+1} \int_M \omega_1 \wedge D_{m-k-1} \star D_k \nu = \\ & = - \int_M D_{m-1} (\omega_1 \wedge \star D_k \nu) + \int_M D_k \omega_1 \wedge \star D_k \nu = \\ & = - \int_N \chi_1 \wedge i^* \star D_k \nu + (\eta_1 \mid D_k \nu)_{L^2} = \\ & = (-1)^{mk+m+1} \int_N \chi_2 \wedge \star i^* d_{k-1, \min}^* \nu - (\eta_2 \mid d_{k-1, \min}^* \nu)_{L^2} = \\ & = (-1)^{mk+m+1} \left(\int_M D_{m-1} (\star \omega_2 \wedge d_{k-1, \min}^* \nu) - \right. \\ & \quad \left. - \int_M D_{m-k} \star \omega_2 \wedge d_{k-1, \min}^* \nu \right) = \\ & = (-1)^{k \cdot (m-k)+1} \int_M \star \omega_2 \wedge D_{k-1} d_{k-1, \min}^* \nu = (\omega_2 \mid -D_{k-1} d_{k-1, \min}^* \nu)_{L^2} \cdot \end{aligned} \quad (2.5.119)$$

Daraus folgt

$$(\omega_1 - \omega_2 \mid d_{k,min}^* D_k \nu)_{L^2} = (\omega_1 - \omega_2 \mid D_{k-1} d_{k-1,min}^* \nu)_{L^2} = 0. \quad (2.5.120)$$

Für $\varrho \in \text{im } D_{k-1} \cap \text{im } d_{k,min}^*$ wählen wir $\varrho_1 \in \mathcal{D}_{k-1}$ und $\varrho_2 \in \mathcal{D}(d_{k,min}^*)$, für die

$$\varrho = D_{k-1} \varrho_1 = d_{k,min}^* \varrho_2 \quad (2.5.121)$$

gilt. Aufgrund der Hodgezerlegung 1.1.8 können

$$\varrho_1 = D_{k-1}^* \vartheta_1 \in \text{im } D_{k-1}^* \quad \text{und} \quad \varrho_2 = d_{k,min} \vartheta_2 \in \text{im } d_{k,min} \quad (2.5.122)$$

mit $\vartheta_1 \in \text{im } D_{k-1} \cap \mathcal{D}_{k-1}^*$ und $\vartheta_2 \in \text{im } d_{k,min}^* \cap \mathcal{D}(d_{k,min})$ gewählt werden. Für

$$\vartheta := \vartheta_1 - \vartheta_2 \quad (2.5.123)$$

gilt

$$D_{k-1} d_{k-1,min}^* \vartheta = D_{k-1} d_{k-1,min}^* \vartheta_1 = D_{k-1} \varrho_1 = \varrho \quad (2.5.124)$$

und

$$d_{k,min}^* D_k \vartheta = -d_{k,min}^* D_k \vartheta_2 = -d_{k,min}^* \varrho_2 = -\varrho, \quad (2.5.125)$$

woraus $\vartheta \in \ker A_k$ folgt. Aus Formel (2.5.119) erhalten wir also

$$\omega_1 - \omega_2 \perp_{L^2} \text{im } D_{k-1} \cap \text{im } d_{k,min}^*, \quad (2.5.126)$$

was gleichbedeutend ist mit

$$\omega_1 - \omega_2 \in \ker D_{k-1}^* + \ker d_{k,min}. \quad (2.5.127)$$

Folglich gibt es ein $\gamma_1 \in \ker d_{k,min}$ und ein $\gamma_2 \in \ker D_{k-1}^*$ mit

$$\omega_1 + \gamma_1 = \omega_2 + \gamma_2. \quad (2.5.128)$$

Wir setzen

$$\omega := \omega_1 + \gamma_1 = \omega_2 + \gamma_2. \quad (2.5.129)$$

Da mit Satz 2.3.5 und Korollar 2.3.6

$$\gamma_1 \in \ker d_{k,min} = \ker D_k \cap \ker i^* \quad (2.5.130)$$

und

$$\gamma_2 \in \ker D_{k-1}^* = \ker d_{k-1, \min}^* \cap \ker (\star i^* \star) \quad (2.5.131)$$

gilt, folgt

$$D_k \omega = D_k (\omega_1 + \gamma_1) = D_k \omega_1 = \eta_1, \quad (2.5.132)$$

$$d_{k-1, \min}^* \omega = d_{k-1, \min}^* (\omega_2 + \gamma_2) = d_{k-1, \min}^* \omega_2 = \eta_2, \quad (2.5.133)$$

$$i^* \omega = i^* (\omega_1 + \gamma_1) = i^* \omega_1 = \chi_1 \quad (2.5.134)$$

und

$$\star i^* \star \omega = \star i^* \star (\omega_2 + \gamma_2) = \star i^* \star \omega_2 = \chi_2. \quad (2.5.135)$$

Wir nehmen nun an, es gebe ein geeignetes ω , das die Bedingung aus Formel (2.5.114) erfüllt. Mit

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega \quad (2.5.136)$$

sind dann offenbar die Formeln (2.5.115) und (2.5.116) erfüllt. Analog zu Formel (2.5.119) sieht man für $\nu \in \ker A_k$, daß

$$\begin{aligned} & \int_N \chi_1 \wedge i^* \star D_k \nu - (\eta_1 \mid D_k \nu)_{L^2} = \\ & = (-1)^{m \cdot (k-1)} \int_N \chi_2 \wedge \star i^* d_{k-1, \min}^* \nu + (\eta_2 \mid d_{k-1, \min}^* \nu)_{L^2} \end{aligned} \quad (2.5.137)$$

gilt.

■

3 Anwendungen

In diesem Kapitel sollen einige Anwendungen der in Kapitel 2 besprochenen Randwertprobleme vorgestellt werden. Solche Anwendungen sind unter anderem in der Elektrodynamik und der Strömungsmechanik zu finden. Es ist im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich, die zum tieferen Verständnis der folgenden Anwendungen nötigen physikalischen Grundlagen zu erläutern. Um sich mit der Elektrodynamik vertraut zu machen, empfehlen wir das Buch von JACKSON [9], in dem dieses Fachgebiet sehr ausführlich und detailliert dargestellt wird. Eine grundlegende Einführung in die Strömungsmechanik stellt etwa das Buch von FOX/MCDONALD [5] dar.

Wir werden die in Abschnitt 2.4 eingeführten Bezeichnungen (M , \widetilde{M} , $N = \partial M$ etc.) weiterhin beibehalten, solange nichts anderes angegeben wird. dx^\sharp bezeichnet die äußere Normale von M .

3.1 Divergenz und Rotation

Die Divergenz und die Rotation sind wichtige Operatoren der Physik. Die Divergenz ist ein Maß für die Quellstärke von Strömungen, das heißt dafür, ob in einem Raumgebiet Feldlinien beginnen (positive Divergenz) oder enden (negative Divergenz). Im elektrostatischen Fall etwa entspricht die Divergenz der Ladungsdichte eines elektrischen Feldes. Die Rotation ist ein Maß dafür, wie stark in einem Fluß verschiedene Strömungsschichten tangential aneinanderreiben. Im magnetostatischen Fall entspricht die Rotation der Stromdichte eines Magnetfeldes.

3.1.1 Definition: Die **Divergenz** eines Vektorfeldes wird durch

$$\begin{aligned} \operatorname{div} : C^\infty(TM) &\rightarrow C^\infty(M), \\ X &\mapsto \star \bar{d}_{m-1} \star X^\flat \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

definiert. Sie kann zu

$$\operatorname{div} = \star D_{m-1} \star \circ \flat \quad (3.1.2)$$

fortgesetzt werden.

3.1.2 Definition: Falls $m = 3$ ist, wird die **Rotation** eines Vektorfeldes durch

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} : C^\infty(TM) &\rightarrow C^\infty(TM), \\ X &\mapsto \left(\star \bar{d}_1 X^\flat \right)^\sharp \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

definiert und kann zu

$$\operatorname{rot} = (\star D_1 \circ \flat)^\sharp \quad (3.1.4)$$

fortgesetzt werden.

Beispiel 1: Seien $f \in L^2(M)$ und $g \in L^2(N)$ gegeben. Es soll ein $X \in L^2(TM)$ gesucht werden, das

$$\operatorname{div} X = f \quad \text{und} \quad \langle X \mid dx^\sharp \rangle = g \text{ auf } N \quad (3.1.5)$$

erfüllt. Die zweite Bedingung kann in unserer Schreibweise zu

$$\star i^* \star X = g \quad (3.1.6)$$

umformuliert werden. Daher ist es äquivalent, ein $\omega \in \mathcal{D}_{m-1}$ mit

$$D_{m-1}\omega = \star f \quad \text{und} \quad i^*\omega = \star g \quad (3.1.7)$$

zu suchen. Wenn es ein solches ω gibt, kann man

$$X = (\star \omega)^\sharp \quad (3.1.8)$$

setzen und hat eine Lösung für das ursprüngliche Problem gefunden.

So ein ω gibt es gemäß Lemma 2.5.6 genau dann, wenn

$$\begin{aligned} \star f &= D_{m-1}\vartheta \text{ mit } \vartheta \in \mathcal{D}_{m-1} \text{ und } i^*\vartheta \in L^2(\wedge^{m-1}T^*N) \text{ und} \\ \star g &= i^*\gamma + i^*\vartheta + D_{N,m-2}\varrho \text{ mit } \gamma \in \widehat{\mathcal{H}}_{m-1} \text{ und } \varrho \in \mathcal{D}_{N,m-2} \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

gilt.

Aus Lemma 2.5.5 ergibt sich, daß es genau dann ein derartiges ω gibt, wenn

$$\int_M f = \int_N g \quad (3.1.10)$$

gilt.

Diese Bedingung ist meist leichter zu überprüfen, als die oben angegebenen Bedingungen aus Formel (3.1.9).

Beispiel 2: Wir betrachten nun den Spezialfall, daß M dreidimensional ist. Seien $Y \in L^2(TM)$ und $Z \in L^2(TN)$ gegeben. Es gibt genau dann ein $X \in L^2(TM)$, das

$$\operatorname{rot} X = Y \quad \text{und} \quad (i^* X^\flat)^\sharp = Z \quad (3.1.11)$$

erfüllt, wenn

$$\begin{aligned} \star Y^\flat &= D_1 \vartheta \text{ mit } \vartheta \in \mathcal{D}_1 \text{ und } i^* \vartheta \in L^2(T^*N) \text{ und} \\ Z^\flat &= i^* \gamma + i^* \vartheta + D_{N,0} \varrho \text{ mit } \gamma \in \widehat{\mathcal{H}}_1 \text{ und } \varrho \in \mathcal{D}_{N,0} \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

gilt. Wie in Beispiel 1 wurde das Problem nämlich auf die Situation von Lemma 2.5.6 zurückgeführt. Aus Satz 2.5.3 ergibt sich, daß es genau dann ein entsprechendes χ gibt, wenn $Y^\flat \in \ker D_1$, $Z^\flat \in \mathcal{D}_{N,1}^{-\frac{1}{2}}$ und

$$i^* Y^\flat = D_{N,1}^{-\frac{1}{2}} Z^\flat \quad (3.1.13)$$

gilt, und wenn für alle $\nu \in \widehat{\mathcal{H}}_1$

$$\left(Y^\flat \mid \nu \right)_{L^2} = \left(\star Y^\flat \mid \star \nu \right)_{L^2} = \int_N Z^\flat \wedge i^* \bar{\nu} \quad (3.1.14)$$

gilt.

Ob die Bedingungen aus Lemma 2.5.6 oder die Bedingungen aus Satz 2.5.3 leichter zu überprüfen sind, hängt vom Einzelfall ab.

3.2 Die Maxwellgleichungen

Wir wollen nun mit den bisher vorgestellten Ergebnissen die Maxwellgleichungen untersuchen.

Die Grundgrößen der Elektrodynamik sind mehrere glatte zeitabhängige Vektorfelder auf einer dreidimensionalen orientierten zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeit X (ohne Rand): die elektrische Feldstärke \mathbf{E} , die dielektrische Verschiebungsdichte \mathbf{D} , das Magnetfeld \mathbf{H} und die magnetische Induktion \mathbf{B} . Dazu kommen die Stromdichte \mathbf{J} (zeitabhängiges Vektorfeld auf X) und die Ladungsdichte ρ (zeitabhängige Funktion auf X), die als Inhomogenitäten in den Maxwellgleichungen auftreten.

Wir nehmen generell an, daß wir uns im Vakuum befinden, was die auftretenden Gleichungen zum Teil wesentlich vereinfacht. Weiterhin setzen wir X als geschlossen voraus.

Um Mißverständnisse auszuschließen, werden wir in diesem Abschnitt den Index M grundsätzlich nicht weglassen, da mit mehreren verschiedenen Mannigfaltigkeiten gleichzeitig argumentiert wird, und es wesentlich ist, zu wissen, auf welcher Mannigfaltigkeit eine Abbildung operiert.

Wir weisen darauf hin, daß D die äußere Ableitung bezeichnet, wogegen \mathbf{D} für die dielektrische Verschiebungsdichte steht. Da beide Bezeichnungen in ihrem jeweiligen Fachgebiet einen Standard darstellen, halten wir es für angebracht, sie nicht abzuändern, auch auf die Gefahr einer Verwechslung hin.

3.2.1 Lemma: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, und seien

$$M = I \times X \tag{3.2.1}$$

und $\alpha, \omega \in \Omega_0^k(M)$ mit $\alpha_p \in \wedge^k X$ für alle $p \in M$ gegeben. Wie man leicht nachrechnet gilt dann

$$\begin{aligned}
\star_X \star_X &= 1, \\
\star_M \star_M \omega &= (-1)^k \omega, \\
dt \wedge \star_X \alpha &= (-1)^k \star_M \alpha, \\
\star_M (dt \wedge \alpha) &= \star_X \alpha, \\
\bar{\delta}_{M,k-1} \alpha &= \delta_{X,k-1} \alpha, \\
\bar{d}_{M,k+1} (dt \wedge \alpha) &= -dt \wedge d_{X,k} \alpha, \\
\bar{\delta}_{M,k} (dt \wedge \alpha) &= dt \wedge \delta_{X,k-1} \alpha - \frac{\partial}{\partial t} \alpha, \\
\bar{d}_{M,k} \alpha &= d_{X,k} \alpha + dt \wedge \frac{\partial}{\partial t} \alpha.
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Dabei bezeichnet dt die Volumenform auf I .

3.2.2 Definition: Die **Maxwellgleichungen** für die elektromagnetischen Grundgrößen in SI-Einheiten lauten

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}_X \mathbf{B} = 0 & \quad \operatorname{rot}_X \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = 0 \\
\operatorname{div}_X \mathbf{D} = \varrho & \quad \operatorname{rot}_X \mathbf{H} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} = \mathbf{J}.
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Diese Gleichungen gelten allgemein, nicht nur im Vakuum.

3.2.3 Definition: Auf

$$M = I \times X \tag{3.2.4}$$

mit einem kompakten Intervall $I \subset \mathbb{R}$ setzen wir

$$\begin{aligned}
F_{ex} &:= dt \wedge \mathbf{E}^{bx} + \star (dt \wedge \mathbf{B}^{bx}) = dt \wedge \mathbf{E}^{bx} - \star_X \mathbf{B}^{bx} \\
F_{in} &:= dt \wedge \mathbf{D}^{bx} + \star (dt \wedge \mathbf{H}^{bx}) = dt \wedge \mathbf{D}^{bx} - \star_X \mathbf{H}^{bx} \\
j &:= \varrho dt + \mathbf{J}^{bx},
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

wobei dt wiederum die Volumenform auf I bezeichnet.

3.2.4 Satz: Auf einem kompakten Intervall $I \subset \mathbb{R}$ sind die Maxwellgleichungen aus Definition 3.2.2 äquivalent zu

$$\begin{aligned}
\bar{d}_{M,2} F_{ex} &= 0 \\
\bar{\delta}_{M,1} F_{in} &= j.
\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Beweis: Die Äquivalenz folgt aus der Definition von Divergenz und Rotation (Definitionen 3.1.1 und 3.1.2) und Lemma 3.2.1. Dabei beziehen sich Divergenz und Rotation in Definition 3.2.2 auf Vektorfelder auf X , also

$$\operatorname{div}_X = -\delta_{X,0} \circ \flat_X \quad (3.2.7)$$

und

$$\operatorname{rot}_X = (\star_X d_{X,1} \circ \flat_X)^{\sharp_X}. \quad (3.2.8)$$

■

Bemerkung: In der Elektrodynamik wird die kovariante Darstellung der Maxwellgleichungen meist auf einer Lorentzmannigfaltigkeit

$$(I \times X, 1 \oplus (-g_X)) \quad (3.2.9)$$

durchgeführt, um die Elektrodynamik relativistisch behandeln zu können. g_X bezeichnet die Metrik auf X . Im nichtrelativistischen Fall können alle Berechnungen aber ebenso gut auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit

$$(I \times X, 1 \oplus g_X) \quad (3.2.10)$$

durchgeführt werden. Dadurch umgeht man etliche Schwierigkeiten, die sich daraus ergeben, daß die Ergebnisse aus Kapitel 2 nicht ohne weiteres auf Lorentzmannigfaltigkeiten adaptiert werden können.

Im Vakuum unterscheiden sich \mathbf{E} und \mathbf{D} sowie \mathbf{H} und \mathbf{B} jeweils nur durch eine Konstante (nämlich durch die elektrische Feldkonstante ε_0 bzw. die magnetische Feldkonstante μ_0). Durch geeignete Eichung können \mathbf{E} und \mathbf{D} sowie \mathbf{H} und \mathbf{B} identifiziert werden. Daher können auch F_{ex} und F_{in} identifiziert werden. Sie werden ab sofort beide mit F bezeichnet.

Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \bar{d}_{M,2} F &= 0 \\ \bar{\delta}_{M,1} F &= j \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

mit $F \in \Omega^2(M)$ und $j \in \operatorname{im} \bar{\delta}_{M,1}$ kann verallgemeinert werden zu

$$\begin{aligned} D_{M,2} F &= 0 \\ d_{M,1,min}^* F &= j \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

mit $F \in \mathcal{D}_{M,2} \cap \mathcal{D}(d_{M,1,min}^*)$ und $j \in \text{im } d_{M,1,min}^*$. Es stellt sich nun die Frage nach der Lösbarkeit dieser verallgemeinerten Maxwellgleichungen bei gegebener Strom- und Ladungsdichte. Mit einem kompakten Zeitintervall I ist

$$M = I \times X \quad (3.2.13)$$

eine vierdimensionale kompakte orientierte zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand. Wir bezeichnen den Rand von M wiederum mit N .

3.2.5 Satz: Sei $j \in \text{im } d_{M,1,min}^*$ gegeben. Dann gibt es ein $F \in \mathcal{D}_{M,2} \cap \mathcal{D}(d_{M,1,min}^*)$ mit

$$D_{M,2}F = 0 \quad \text{und} \quad d_{M,1,min}^*F = j. \quad (3.2.14)$$

Diese Lösung F ist im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

Beweis: Wir wählen ein $\omega \in \mathcal{D}(d_{M,1,min}^*)$, so daß

$$j = d_{M,1,min}^*\omega \quad (3.2.15)$$

gilt. Gemäß der Hodgezerlegung bezüglich des Fredholmkomplexes

$$(d_{M,min}, \mathcal{D}(d_{M,min})) \quad (3.2.16)$$

kann ω als

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 \in \widehat{\mathcal{H}}_{M,min,2} \oplus \text{im } d_{M,1,min} \oplus \text{im } d_{M,2,min}^* \quad (3.2.17)$$

geschrieben werden. Dann gilt

$$d_{M,1,min}^*\omega = d_{M,1,min}^*\omega_1 = j. \quad (3.2.18)$$

ω_1 liegt im Definitionsbereich von $d_{M,1,min}^*$, da ω , ω_0 und ω_2 im Definitionsbereich von $d_{M,1,min}^*$ liegen. Wir setzen nun

$$F := \omega_1. \quad (3.2.19)$$

Dann erfüllt F die gewünschten Eigenschaften, da

$$\omega_1 \in \text{im } d_{M,1,min} \subset \ker d_{M,2,min} \subset \ker D_{M,2} \quad (3.2.20)$$

gilt.

Falls $\ker D_{M,2} \cap \ker d_{M,1,min}^*$ nicht trivial ist, folgt sofort, daß F nicht eindeutig bestimmt sein kann. Wir werden nun ein Beispiel einer geeigneten Mannigfaltigkeit M angeben, für die

$$\ker D_{M,2} \cap \ker d_{M,1,min}^* \neq 0 \quad (3.2.21)$$

gilt. Wir betrachten dazu den dreidimensionalen Torus

$$\mathbb{T}^3 \simeq S^1 \times S^1 \times S^1. \quad (3.2.22)$$

dt_1 , dt_2 und dt_3 bezeichnen die jeweiligen Volumenformen auf den einzelnen Sphären. Da

$$\star(dt_1 \wedge dt_2) = dt_3 \quad (3.2.23)$$

gilt, liegt $dt_1 \wedge dt_2$ sicherlich in $\widehat{\mathcal{H}}_{M,2}$. Folglich ist $\widehat{\mathcal{H}}_{M,2}$ nicht trivial. In Wahrheit ist $\widehat{\mathcal{H}}_{M,2}$ sogar dreidimensional, wie man mit Hilfe der Künneth-Formel (vgl. MACLANE [10], Theorem 5.10.1) leicht sieht. Für

$$M = I \times \mathbb{T}^3 \quad (3.2.24)$$

sei

$$\pi : M \rightarrow \mathbb{T}^3 \quad (3.2.25)$$

die kanonische Projektion. Für ein $\omega \in \widehat{\mathcal{H}}_{\mathbb{T}^3,2}$ gilt dann

$$D_{M,2}\pi^*\omega = \bar{d}_{M,2}\pi^*\omega = \pi^*d_{\mathbb{T}^3,2}\omega = 0, \quad (3.2.26)$$

und mit Lemma 3.2.1 gilt

$$d_{M,1,min}^*\pi^*\omega = \bar{\delta}_{M,1}\pi^*\omega = \delta_{\mathbb{T}^3,1}\pi^*\omega = \pi^*\delta_{\mathbb{T}^3,1}\omega = 0. \quad (3.2.27)$$

Daher gilt

$$\dim(\ker D_{M,2} \cap \ker d_{M,1,min}^*) \geq \dim \widehat{\mathcal{H}}_{\mathbb{T}^3,2}, \quad (3.2.28)$$

weil

$$\pi^* : \Omega(\mathbb{T}^3) \rightarrow \Omega(M) \quad (3.2.29)$$

injektiv ist. Folglich ist $\ker D_{M,2} \cap \ker d_{M,1,min}^*$ nicht trivial. ■

Bemerkung: Satz 3.2.5 sagt in Verbindung mit Satz 3.2.4 aus, für welche Vorgaben der Strom- und Ladungsdichte auf einem kompakten Zeitintervall die Maxwellgleichungen lösbar sind. Dieses Ergebnis steht in Übereinstimmung mit der Physik, da anschaulich völlig klar ist, daß sich zu jeder (zulässigen) Vorgabe von Ladungsverteilungen und Strömen gewisse elektromagnetische Felder einstellen müssen. Allerdings sind Strom- und Ladungsdichte in der Realität durch die Kontinuitätsgleichung gekoppelt und können nicht beliebig gewählt werden. Daher ist auch verständlich, warum die Maxwellgleichungen nicht für jede beliebige Vorgabe von ϱ und \mathbf{J} lösbar sind. Es gibt offenbar genau dann keine Lösung, wenn j nicht im Bild von $d_{M,1,min}$ liegt.

Die Nichteindeutigkeit der Lösung resultiert aus der Tatsache, daß ohne Änderung der Strom- oder Ladungsdichte ebene Wellen, das heißt rotationsfreie Felder ohne Quellen und Senken überlagert werden können.

Es soll nun wiederum geprüft werden, ob die Maxwellgleichungen unter bestimmten Rahmenbedingungen lösbar sind. Wir legen wieder ein kompaktes Zeitintervall zugrunde. Jetzt wollen wir aber nicht nur Strom- und Ladungsdichte vorgeben, sondern zusätzlich zu Beginn und Ende des Zeitintervalls alle relevanten Größen festlegen.

3.2.6 Problem: Betrachte die Voraussetzungen von Satz 3.2.5. Zusätzlich seien $\chi_1 \in L^2(\wedge^2 T^*N)$ und $\chi_2 \in L^2(T^*N)$ gegeben. Wann gibt es ein $F \in \mathcal{D}_{M,2} \cap \mathcal{D}(d_{M,1,min}^*)$, so daß

$$\begin{array}{ll} (1) & D_{M,2}F = 0 \\ (2) & d_{M,1,min}^*F = j \end{array} \qquad \begin{array}{ll} (3) & i^*F = \chi_1 \\ (4) & \star i^* \star F = \chi_2 \end{array}$$

gilt?

Gemäß Lemma 2.5.6 muß

$$\chi_1 = i^*\gamma_1 + D_{N,1}\varrho_1 \tag{3.2.30}$$

mit $\gamma_1 \in \widehat{\mathcal{H}}_{M,2}$ und $\varrho_1 \in \mathcal{D}_{N,1}$ gelten.

Nach Korollar 2.5.8 muß

$$\chi_2 = \star i^* \gamma_2 + \star i^* \vartheta_2 + \star D_{N,1} \varrho_2 \quad (3.2.31)$$

mit $\gamma_2 \in \widehat{\mathcal{H}}_{M,2}$, $\varrho_2 \in \mathcal{D}_{N,1}$ und $\vartheta_2 \in \mathcal{D}(d_{M,1,min}^*)$ mit $d_{M,1,min}^* \vartheta_2 = j$ und $i^* \star \vartheta_2 \in L^2(\wedge^2 T^* N)$ gelten.

Es ist auch möglich, äquivalente Bedingungen mit Hilfe von Satz 2.5.3 und Korollar 2.5.9 auszudrücken:

Es muß $\chi_1 \in \ker D_{N,2}$, $\star \chi_2 \in \mathcal{D}_{N,3}^{-\frac{1}{2}}$ und

$$\star i^* \star j = \star D_{N,3}^{-\frac{1}{2}} \star \chi_2 \quad (3.2.32)$$

gelten, und es muß für alle $\nu \in \widehat{\mathcal{H}}_{M,1}$

$$0 = \int_N \chi_1 \wedge i^* \bar{\nu} \quad (3.2.33)$$

und

$$(j \mid \nu)_{L^2} = - \int_N \chi_2 \wedge \star i^* \bar{\nu} \quad (3.2.34)$$

gelten. Daß man $\chi_1 \in \ker D_{N,2}$ fordern darf (statt $\chi_1 \in \ker D_{N,2}^{-\frac{1}{2}}$), sieht man daran, daß

$$\ker D_N^{-\frac{1}{2}} \cap L^2(\wedge T^* N) = \ker D_N \quad (3.2.35)$$

gilt.

Falls diese Voraussetzungen nun erfüllt sind, gibt es ein $F_1 \in \mathcal{D}_{M,2}$, das die Bedingungen (1) und (3) erfüllt und ein $F_2 \in \mathcal{D}(d_{M,1,min}^*)$, das die Bedingungen (2) und (4) erfüllt. Falls nun für alle

$$\nu \in \ker(d_{2,min}^* D_2 + D_1 d_{1,min}^*) \quad (3.2.36)$$

die Gleichung

$$\int_N \chi_1 \wedge i^* \star D_2 \nu = \int_N \chi_2 \wedge \star i^* d_{1,min}^* \nu + (j \mid D_2 \nu)_{L^2} \quad (3.2.37)$$

gilt, ist das Problem lösbar, wie in Satz 2.5.10 gezeigt wurde.

Bemerkung: Wie man in Definition 3.2.3 sieht, entspricht χ_1 dem Magnetfeld und χ_2 dem elektrischen Feld am Rand des Zeitintervalls I . Unter Vorgabe von Strom- und Ladungsdichte auf ganz I und Vorgabe der elektromagnetischen Felder am Beginn und am Ende des betrachteten Zeitintervalls sind die Maxwellgleichungen also genau dann lösbar, wenn Problem 3.2.6 lösbar ist. Falls es eine Lösung gibt, ist diese eindeutig, wie das folgende Lemma besagt.

3.2.7 Lemma: Falls es für Problem 3.2.6 eine Lösung F gibt, so ist diese eindeutig.

Beweis: Wir behalten die Bezeichnungen aus Problem 3.2.6 bei. I sei gleich $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Es genügt zu zeigen, daß es kein nichttriviales

$$\omega \in \ker d_{M,k,min} \cap \ker D_{M,k-1}^* \quad (3.2.38)$$

gibt, da

$$\ker D_{M,k} \cap \ker i^* = \ker d_{M,k,min} \quad (3.2.39)$$

und

$$\ker d_{M,k-1,min}^* \cap \ker (\star i^* \star) = \ker D_{M,k-1}^* \quad (3.2.40)$$

gilt. Die Behauptung ergibt sich dann mit $k = 2$.

Sei $\omega \in \ker d_{M,k,min} \cap \ker D_{M,k-1}^*$ gegeben. Wegen

$$\ker d_{M,k,min} \cap \ker D_{M,k-1}^* \subset \widehat{\mathcal{H}}_{M,k} \quad (3.2.41)$$

ist ω harmonisch, und wegen

$$\ker d_{M,k,min} \subset \mathcal{D}(d_{M,k,min}) \quad (3.2.42)$$

gilt

$$i^* \omega = 0. \quad (3.2.43)$$

Aufgrund der Künneth-Formel (vgl. MACLANE [10], Theorem 5.10.1) gilt

$$\mathcal{H}_{M,k} \simeq \sum_{i+j=k} \mathcal{H}_{I,i} \otimes \mathcal{H}_{X,j}. \quad (3.2.44)$$

Da $\mathcal{H}_{I,0}$ eindimensional ist und für $i \neq 0$

$$\mathcal{H}_{I,i} = 0 \quad (3.2.45)$$

gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned} \dim \widehat{\mathcal{H}}_{M,k} &= \dim \mathcal{H}_{M,k} = \\ &= \dim \mathcal{H}_{X,k} = \dim \widehat{\mathcal{H}}_{X,k} < \infty. \end{aligned} \quad (3.2.46)$$

Wenn wir mit π die kanonische Projektion

$$\pi : M \rightarrow X \quad (3.2.47)$$

bezeichnen, gilt für $\vartheta \in \widehat{\mathcal{H}}_{X,k}$

$$\bar{d}_{M,k} \pi^* \vartheta = \pi^* d_{X,k} \vartheta = 0 \quad (3.2.48)$$

und

$$\bar{\delta}_{M,k-1} \pi^* \vartheta = \delta_{X,k-1} \pi^* \vartheta = \pi^* \delta_{X,k-1} \vartheta = 0. \quad (3.2.49)$$

Offenbar gilt

$$\star i^* \star \pi^* \vartheta = 0, \quad (3.2.50)$$

woraus $\pi^* \vartheta \in \mathcal{D}_{M,k-1}^*$ folgt. Daher gilt $\pi^* \vartheta \in \widehat{\mathcal{H}}_{M,k}$. Da π^* injektiv ist, folgt aus Formel (3.2.46)

$$\widehat{\mathcal{H}}_{M,k} = \pi^* \widehat{\mathcal{H}}_{X,k}. \quad (3.2.51)$$

Sei nun

$$\omega = \pi^* \vartheta \in \widehat{\mathcal{H}}_{M,k} \quad (3.2.52)$$

mit $\vartheta \in \widehat{\mathcal{H}}_{X,k}$ gegeben. Falls $\omega \in \ker i^*$ gilt folgt daraus

$$0 = i^* \omega = i^* \pi^* \vartheta = \vartheta. \quad (3.2.53)$$

Daraus folgt

$$\omega = \pi^* \vartheta = 0. \quad (3.2.54)$$

■

3.3 Ein Beispiel aus der Strömungsmechanik

Die Strömung einer Flüssigkeit oder eines Gases auf einer Mannigfaltigkeit kann als Vektorfeld beschrieben werden. Im allgemeinen betrachtet man in der Strömungsmechanik Strömungen auf einem berandeten Teilgebiet des \mathbb{R}^2 oder des \mathbb{R}^3 . Falls das betrachtete Gebiet zusammenhängend und beschränkt und die Berandung glatt ist, liegt eine kompakte zusammenhängende zwei- oder dreidimensionale orientierte Riemannsche Untermannigfaltigkeit mit Rand des \mathbb{R}^2 oder des \mathbb{R}^3 vor, deren Metrik von der Standardmetrik des \mathbb{R}^2 oder des \mathbb{R}^3 induziert wird. Man nennt eine Strömung **stationär**, falls sie keiner zeitlichen Änderung unterliegt.

Uns stellt sich nun die Frage, welche Aussagen in Bezug auf Existenz und Eindeutigkeit einer Strömung gemacht werden können, wenn die Strömung am Rand des betrachteten Gebiets bekannt ist. Wir setzen voraus, daß es sich um eine stationäre divergenz- und rotationsfreie Strömung eines inkompressiblen Fluids handelt. Diese Situation erhält man in der Praxis, wenn man ein abgeschlossenes System betrachtet (Divergenzfreiheit), in dem ein inkompressibles Fluid strömt, dessen Trägheit man vernachlässigen kann (Rotationsfreiheit) und sich eine stationäre Strömung eingestellt hat. Auf einer zweidimensionalen kompakten orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit M wird die Rotation durch

$$\text{rot} := (\star \bar{d}_1 \circ b)^\sharp : C^\infty(TM) \rightarrow C^\infty(M) \quad (3.3.1)$$

definiert und kann zu

$$\text{rot} = (\star D_1 \star b)^\sharp \quad (3.3.2)$$

fortgesetzt werden. Die Trägheit eines Fluids kann man etwa bei stark verdünnten Gasen oder sehr langsamen — sogenannten **kriechenden** — Strömungen vernachlässigen. Allerdings sind Gase hochkompressibel, so daß sie für unsere Betrachtungen nicht von Interesse sind.

Die Berandung des betrachteten Raumgebiets ist im allgemeinen theoretischer Natur und nicht durch mechanische Wände gegeben. Es wird also in Wahrheit ein Ausschnitt eines größeren Systems betrachtet, so daß sehr wohl Materie in das betrachtete Gebiet hinein- oder daraus herausfließen kann.

Mathematisch gesehen ergibt sich daraus das folgende Problem:

3.3.1 Problem: Sei M eine m -dimensionale kompakte orientierte zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand $N = \partial M$. Auf N seien $\chi_1 \in L^2(T^*N)$ und $\chi_2 \in L^2(N)$ gegeben. Wann gibt es ein

$$\omega \in \ker D_1 \cap \ker d_{0,min}^*, \quad (3.3.3)$$

so daß

$$i^*\omega = \chi_1 \quad \text{und} \quad \star i^* \star \omega = \chi_2 \quad (3.3.4)$$

gilt?

χ_1^\sharp beschreibt dabei die Tangentialkomponente und χ_2 die Normalkomponente der gesuchten Strömung am Rand von M . Die Strömung selbst wird durch ω^\sharp beschrieben. Die Forderung $\omega \in \ker D_1$ entspricht der Rotationsfreiheit und $\omega \in \ker d_{0,min}^*$ der Divergenzfreiheit von ω^\sharp . Natürlich sollte $m = 2$ oder $m = 3$ gelten und M eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^m sein.

Auf dieses Problem kann Satz 2.5.10 angewandt werden. Ein ω , das die geforderten Eigenschaften besitzt, gibt es genau dann, wenn es ein $\omega_1 \in \ker D_1$ gibt, für das

$$i^*\omega_1 = \chi_1 \quad (3.3.5)$$

gilt und ein $\omega_2 \in \ker d_{0,min}^*$ mit

$$\star i^* \star \omega_2 = \chi_2, \quad (3.3.6)$$

und wenn außerdem für jedes $\nu \in \ker d_{1,min}^* D_1 + D_0 d_{0,min}^*$

$$\int_N \chi_1 \wedge i^* \star D_1 \nu = \int_N \chi_2 \cdot \star i^* d_{0,min}^* \nu \quad (3.3.7)$$

gilt. Geeignete ω_1 und ω_2 gibt es gemäß Lemma 2.5.6 und Korollar 2.5.8 genau dann, wenn

$$\chi_1 = i^* \gamma_1 + D_{N,0} \varrho_1 \quad (3.3.8)$$

mit $\gamma_1 \in \widehat{\mathcal{H}}_1$, $\varrho_1 \in \mathcal{D}_{N,0}$ und

$$\star \chi_2 = i^* \gamma_2 + D_{N,m-2} \varrho_2 \quad (3.3.9)$$

mit $\gamma_2 \in \widehat{\mathcal{H}}_{m-1}$ und $\varrho_2 \in \mathcal{D}_{N,m-2}$ gilt. Wir setzen dann

$$\omega_1 = \gamma_1 + D_0 \tilde{\varrho}_1 \quad (3.3.10)$$

und

$$\omega_2 = (-1)^{m-1} (\star\gamma_2 + \star D_{m-2}\tilde{\varrho}_2), \quad (3.3.11)$$

wobei $\tilde{\varrho}_1 \in \mathcal{D}_0$ und $\tilde{\varrho}_2 \in \mathcal{D}_{m-2}$ so gewählt sind, daß

$$i^*\tilde{\varrho}_1 = \varrho_1 \quad (3.3.12)$$

und

$$i^*\tilde{\varrho}_2 = \varrho_2 \quad (3.3.13)$$

gilt, was gemäß dem Spursatz von Paquet 2.3.1 möglich ist.

Äquivalente Anforderungen an χ_1 und χ_2 , die die Existenz geeigneter ω_1 und ω_2 sicherstellen, ergeben sich aus Satz 2.5.3 und Korollar 2.5.9. Es muß $\chi_1 \in \ker D_{N,1}$ und für alle $\nu_1 \in \widehat{\mathcal{H}}_{m-2}$ und $\nu_2 \in \widehat{\mathcal{H}}_0$

$$0 = \int_N \chi_1 \wedge i^*\nu_1 \quad (3.3.14)$$

und

$$0 = \int_N \chi_2 \cdot \star i^*\nu_2 \quad (3.3.15)$$

gelten. Wie schon in Problem 3.2.6 ist es auch hier erlaubt, $\chi_1 \in \ker D_{N,1}$ zu fordern, da

$$\ker D_N^{-\frac{1}{2}} \cap L^2(\wedge T^*N) = \ker D_N \quad (3.3.16)$$

gilt. Da M als zusammenhängend vorausgesetzt wurde, besteht $\widehat{\mathcal{H}}_0$ gerade aus der Menge der konstanten Funktionen über M . Daher vereinfacht sich Formel (3.3.15) zu

$$0 = \int_N \chi_2. \quad (3.3.17)$$

Falls $m = 2$ gilt, vereinfacht sich auch Formel (3.3.14) zu

$$0 = \int_N \chi_1, \quad (3.3.18)$$

und die Bedingung $\chi_1 \in \ker D_{N,1}$ wird redundant.

Falls $m = 2$ ist, gibt es für eine stationäre divergenz- und rotationsfreie Strömung $\omega^\sharp \in L^2(TM)$ einer inkompressiblen Flüssigkeit häufig eine sogenannte **Stromfunktion**, das heißt eine Funktion

$$\psi \in \ker d_{0,min}^* D_0, \quad (3.3.19)$$

so daß ω gleich $\star D_0\psi$ ist.

3.3.2 Satz: Unter den Voraussetzungen von Problem 3.3.1 mit $m = 2$ gibt es höchstens eine Strömung $\omega^\sharp \in L^2(TM)$, die das Problem 3.3.1 löst und eine Stromfunktion ψ besitzt. Die analoge Aussage gilt bereits, wenn lediglich die Tangentialkomponente der Strömung am Rand von M (also χ_1^\sharp) festgelegt ist und die Normalkomponente χ_2 beliebig sein darf.

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß $\star D_0 \psi$ durch

$$D_0 \psi \in \ker d_{0,min}^* \quad (3.3.20)$$

und

$$\star D_0 \psi \in \ker i^* \quad (3.3.21)$$

eindeutig festgelegt ist. Mit Korollar 2.3.6 und Satz 1.1.8 gilt

$$\begin{aligned} D_0 \psi &\in \operatorname{im} D_0 \cap \ker (i^* \star) \cap \ker d_{0,min}^* = \\ &= \operatorname{im} D_0 \cap \ker (\star i^* \star) \cap \ker d_{0,min}^* = \\ &= \operatorname{im} D_0 \cap \mathcal{D}_0^* \cap \ker d_{0,min}^* = \\ &= \operatorname{im} D_0 \cap \ker D_0^* = 0. \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

Daraus folgt

$$\star D_0 \psi = 0. \quad (3.3.23)$$

■

4 Schlußbemerkung

Es war geplant, die folgende Aussage als Satz in Abschnitt 2.5 aufzunehmen:

Seien $\eta \in L^2(\wedge^{k+1}\mathbb{T}^*M)$, $\chi_1 \in H^{-\frac{1}{2}}(\wedge^k\mathbb{T}^*N)$ und $\chi_2 \in H^{-\frac{1}{2}}(\wedge^{k-1}\mathbb{T}^*N)$ gegeben. Es gibt genau dann ein $\omega \in \mathcal{D}_k \cap \mathcal{D}(d_{k-1, \min}^*)$ mit

$$D_k\omega = \eta, \quad i^*\omega = \chi_1 \quad \text{und} \quad \star i^* \star \omega = \chi_2, \quad (4.1)$$

wenn es ein $\omega_1 \in \mathcal{D}_k$ mit

$$D_k\omega_1 = \eta \quad \text{und} \quad i^*\omega_1 = \chi_1 \quad (4.2)$$

und ein $\omega_2 \in \mathcal{D}(d_{k-1, \min}^*)$ mit

$$\star i^* \star \omega_2 = \chi_2 \quad (4.3)$$

gibt.

Bisher ist es jedoch weder gelungen, die Aussage zu beweisen, noch sie zu widerlegen. In SCHWARZ [13], Theorem 3 wird eine ähnliche Aussage bewiesen, wobei aber stärkere Regularitätsbedingungen an die auftretenden Differentialformen gestellt werden. Ob diese Regularitätsbedingungen genügend abgeschwächt werden können, ist noch zu klären.

Literatur

- [1] **Adams, R.:** Sobolev Spaces, *Academic Press, Inc., Boston, San Diego, New York*, 1978
- [2] **Bott, R. / Tu, L. W.:** Differential Forms in Algebraic Topology, *Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin*, 1986²
- [3] **Brüning, J.:** Einführung in die globale Analysis, *Manuskript, Augsburg*, 1991
- [4] **Brüning, J. / Lesch, M.:** Hilbert Complexes, *Journal of Functional Analysis*, Vol. 108, No. 1, pp. 88–132, 1992
- [5] **Fox, R. W. / McDonald, A. T.:** Introduction to Fluid Mechanics, *John Wiley & Sons, Inc., New York, Chichester, Brisbane*, 1992⁴
- [6] **Friedrichs, K.:** Differential Operators in Hilbert Spaces, *American Journal of Mathematics*, Vol. 61, No. 1, pp. 523–544, 1939
- [7] **Gaffney, M. P.:** The Harmonic Operator for Exterior Differential Forms, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, Vol. 37, pp. 48–50, 1951
- [8] **Gilkey, P. B.:** Invariance Theory, The Heat Equation, And the Atiyah–Singer Index Theorem, *Publish or Perish, Inc., Wilmington, Delaware (U.S.A.)*, 1984
- [9] **Jackson, J. D.:** Classical Electrodynamics, *John Wiley & Sons, Inc., New York, Chichester, Brisbane*, 1975²
- [10] **MacLane, S.:** Homology, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 114, *Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg*, 1963

- [11] **Paquet, L.:** Problèmes mixtes pour le système de Maxwell, *Annales Faculté des Sciences Toulouse*, Vol. IV, pp. 103–141, 1982
- [12] **Reed, M. / Simon, B.:** Methods of Modern Mathematical Physics Vol. I: Functional Analysis, Revised and Enlarged Edition, *Academic Press, Inc., Boston, San Diego, New York*, 1980
- [13] **Schwarz, G.:** Solving a General Boundary Value Problem for the Exterior Derivative of a Differential Form, *Preprint der Universität Mannheim, Mannheim*, 1993
- [14] **Taylor, M. E.:** Pseudodifferential Operators, *Princeton University Press, Princeton, New Jersey*, 1981
- [15] **Warner, F. W.:** Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, *Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg*, 1983³
- [16] **Yosida, K.:** Functional Analysis, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 123, *Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York*, 1980⁶

Symbolverzeichnis

\emptyset	leere Menge
id	identische Abbildung
$\log : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$	natürlicher Logarithmus
$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C},$ $z \mapsto e^z$	Exponentialfunktion
Re z , Im z	Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl z
\bar{z}	zu $z \in \mathbb{C}$ konjugiert komplexe Zahl
B_r	offener Ball um 0 mit Radius r
\bar{X}	Abschluß der Menge X
$\overset{\circ}{X}$	Inneres der Menge X
∂X	Rand der Menge X
$\inf X$	Infimum der Menge X
$\sup X$	Supremum der Menge X
$\dim X$	Dimension des Vektorraums oder der Mannigfaltigkeit X
$U + V$	Summe der Vektorräume U und V
$U \oplus V$	direkte Summe der Vektorräume U und V
U^\perp	Orthogonales Komplement von U
$x \perp y$	x steht senkrecht auf y

$(x y)_X$	Skalarprodukt von x und y im Raum X
$ x $	Betrag der Zahl x
$\ \cdot \ _X$	Norm im Raum X
$\ \cdot \ _{L^\infty}$	Supremumsnorm
$\mathcal{D}(f)$	Definitionsbereich der Abbildung f
$\text{im } f$	Bild der Abbildung f
$\ker f$	Kern der Abbildung f
$\text{supp } f$	Träger der Abbildung f
Γ_f	Graph der Abbildung f
$\ \cdot \ _T$	Graphennorm des Operators T
$\Gamma_T\text{-lim}$	Grenzwert bezüglich der Graphennorm des Operators T
f'	Ableitung der Funktion f
$\mathcal{F}(f)$	Fouriertransformierte von f , S. 62, 68
$f _X$	Einschränkung der Abbildung f auf die Menge X
$T _M$	Einschränkung des Operators T auf Abbildungen über M , S. 90
F_0	Teilmenge der Funktionen mit kompaktem Träger des Funktionenraums F
$\mathcal{C}(X, Y)$	Menge der abgeschlossenen linearen Operatoren mit Definitionsbereich in X und Bildbereich in Y , S. 9
$\text{Hom}(X, Y)$	Menge der Homomorphismen von X nach Y
T^t	zu T formaladjungierter bzw. transponierter Operator, S. 27
T^*	zu T adjungierter Operator
$\text{spec } T$	Spektrum des Operators T

TM	Tangentialbündel der Mannigfaltigkeit M
T^*M	Kotangentialbündel der Mannigfaltigkeit M
S^*M	Kosphärenbündel der Mannigfaltigkeit M
\times	Kartesisches Produkt
\otimes	Tensorprodukt
\wedge	äußeres Produkt
\lfloor	innere Multiplikation
f^*	Pullback der Funktion f , S. 19
$i : \partial M \hookrightarrow M$	Einbettung des Randes einer Mannigfaltigkeit M in M selbst, S. 61
σ_P	Hauptsymbol des Differentialoperators P , S. 28
$AC(I)$	Menge der absolutstetigen Funktionen auf einem Intervall I
$C^n(X)$	Menge der n -mal stetig differenzierbaren Funktionen über X
$C^\infty(X)$	Menge der beliebig oft differenzierbaren Funktionen über X
$C^\infty(E)$	Menge der beliebig oft differenzierbaren Schnitte in E für ein Vektorraumbündel $E \rightarrow M$
$L^2(U, V)$	Menge der quadratintegrierbaren Funktionen von U nach V für eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und einen Banachraum V
$L^2_{loc}(U, V)$	Menge der lokal quadratintegrierbaren Funktionen in $U \rightarrow V$ für eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und einen Banachraum V
$L^2(M)$	Menge der quadratintegrierbaren Funktionen über M
$L^2(E)$	Menge der quadratintegrierbaren Schnitte in E für ein Vektorraumbündel $E \rightarrow M$

$H^s(M)$	Sobolevraum der Stufe s von Funktionen über M , S. 23
$H^s(E)$	Sobolevraum der Stufe s von Schnitten in E für ein Vektorraumbündel $E \rightarrow M$, S. 25
$\text{Diff}_l(E, F)$	Menge der Differentialoperatoren der Ordnung l zwischen Schnitten der Vektorraumbündel E und F
$\text{Diff}_l(E)$	Abkürzung für $\text{Diff}_l(E, E)$
$\Psi\text{Diff}_l(E, F)$	Menge der Pseudodifferentialoperatoren der Ordnung l zwischen Schnitten der Vektorraumbündel E und F , S. 25
$\Psi\text{Diff}_l(E)$	Abkürzung für $\Psi\text{Diff}_l(E, E)$
$\Omega(M), \Omega^k(M)$	Abkürzung für $C^\infty(\wedge T^*M)$ bzw. für $C^\infty(\wedge^k T^*M)$, S. 30
$d_M, d_{M,k}$	äußere Ableitung auf C^∞ -Formen (der Stufe k) mit Träger in $\overset{\circ}{M}$, S. 30
$\delta_M, \delta_{M,k}$	Bezeichnung für d_M^t bzw. für $d_{M,k}^t$, S. 31
$d_{M,min}, d_{M,k,min}$	Abschluß von d_M bzw. $d_{M,k}$ in $L^2(\wedge T^*M)$, S. 31
$d_{M,max} = D_M,$ $d_{M,k,max} = D_{M,k}$	maximale abgeschlossene Fortsetzung von d_M bzw. $d_{M,k}$ in $L^2(\wedge T^*M)$, S. 31
$\mathcal{D}_M, \mathcal{D}_{M,k}$	Definitionsbereich von D_M bzw. $D_{M,k}$, S. 31
$\mathcal{D}_M^*, \mathcal{D}_{M,k}^*$	Definitionsbereich von D_M^* bzw. $D_{M,k}^*$, S. 31
$\bar{d}_M, \bar{d}_{M,k}$	äußere Ableitung auf C^∞ -Formen (der Stufe k), S. 52
$\bar{\delta}_M, \bar{\delta}_{M,k}$	Einschränkung des Operators $d_{M,min}^*$ auf Formen in $\Omega(M)$ bzw. in $\Omega^{k+1}(M)$, S. 52
$D_M^{s,l}, D_{M,k}^{s,l}$	Abschluß von d_M bzw. $d_{M,k}$ in

$$H^s(\wedge T^*M) \rightarrow H^l(\wedge T^*M),$$

$D_M^s, D_{M,k}^s$	Abkürzung für $D_M^{s,s}$ bzw. $D_{M,k}^{s,s}$, S. 55
(\mathcal{D}, D)	Hilbertkomplex, S. 10
(\mathcal{D}^*, D^*)	zu (\mathcal{D}, D) dualer Hilbertkomplex, S. 10
$\Delta_M, \Delta_{M,k}$	Laplaceoperator (der Stufe k) über M , S. 11, 46
$\widehat{\mathcal{H}}_M, \widehat{\mathcal{H}}_{M,k}$	Menge der harmonischen Formen (der Stufe k) über M , S. 12, 46
\mathcal{H}_k	k -te Homologiekategorie eines Hilbertkomplexes, S. 10
$[\chi]_M$	de Rham Kohomologiekategorie der Form χ auf M , S. 50
$\star : \wedge T^*M \rightarrow \wedge T^*M$	Hodgeoperator
\flat, \sharp	Musikalische Isomorphismen
	$L^2(\wedge TM) \xrightleftharpoons[\sharp]{\flat} L^2(\wedge T^*M)$
$\operatorname{div} X$	Divergenz des Vektorfeldes X , S. 112
$\operatorname{rot} X$	Rotation des Vektorfeldes X , S. 112
$\operatorname{vol}(U)$	Volumen von U
$\operatorname{dvol}(M)$	Volumenform auf M
S^n	n -dimensionale Sphäre
T^n	n -dimensionaler Torus
E	elektrische Feldstärke, S. 114
D	dielektrische Verschiebungsdichte, S. 114
H	Magnetfeld, S. 114
B	magnetische Induktion, S. 114
J	Stromdichte, S. 114
ϱ	Ladungsdichte, S. 114
ε_0	elektrische Feldkonstante, S. 116
μ_0	magnetische Feldkonstante, S. 116

Stichwortverzeichnis

- Ableitung, Cartansche, 31
 Ableitung, äußere, 31
 Abschluß, 28, 31

 Cartansche Ableitung, 31

 Differentialform, 30ff
 Differentialform, harmonische, 46
 Differentialoperator, 28f, 30ff
 Divergenz, 111f

 Einbettung, 61
 Einschränkung, 90

 Feld, elektrisches, 111
 Feldkonstante, elektrische, 116
 Feldkonstante, magnetische, 116
 Feldlinie, 111
 Feldstärke, elektrische, 114
 Form, harmonische, 12, 46
 Fortsetzung, maximale abgeschlossene, 27, 31, 45
 Fortsetzung, minimale abgeschlossene, 27, 31, 45
 Fouriertransformation, 62, 68

 Fredholmkomplex, 10, 47, 58
 Fredholmoperator, 27
 Friedrichs–Glättungsoperator, 36

 Glättungsoperator, 36

 Hauptsymbol, 28, 47
 Hilbertkomplex, 10, 45, 56
 Hodgeoperator, 19
 Hodgezerlegung, 12
 Homologie, 10

 Induktion, magnetische, 114
 Involution, 17ff

 Komplex, dualer, 10
 Komplexabbildung, 14
 Kontinuitätsgleichung, 119
 Kosphärenbündel, 34
 Künneth–Formel, 118, 121

 Ladungsdichte, 111, 114
 Laplaceoperator, 11, 46, 58
 Lebesgueintegral, 84
 Lorentzmannigfaltigkeit, 116

- Magnetfeld, 111, 114
 Maxwellgleichungen, 114ff

 Operator, abgeschlossener, 9
 Operator, elliptischer, 24
 Operator, formaladjungierter, 27, 56
 Operator, transponierter, 27, 56
 Operatortopologie, schwache, 37
 Operatortopologie, starke, 37

 Paquet, Spursatz von, 62
 Parametrix, 26
 Pseudodifferentialoperator, 24, 25
 Pullback, 19

 Quellstärke, 111

 Regularität, elliptische, 26, 46
 Rotation, 111f, 123

 SI-Einheiten, 115
 Satz von Stokes, 86
 Sequenz, 15, 87
 Skalarprodukt, 19
 Sobolevnorm, 23
 Sobolevraum, 23, 25
 Spektrum, 56
 Spuoperator, 61
 Spursatz, 62
 Stokes, Satz von, 86
 Strömung, 111, 123ff
 Stromdichte, 111, 114
 Stromfunktion, 125

 Symbol, 28, 47

 Verdopplung, kompakte, 39, 89
 Verschiebungsdichte, dielektrische, 114

 Welle, ebene, 119

 abgeschlossener Operator, 9
 äußere Ableitung, 31

 de Rham Kohomologie, 50
 de Rham Komplex, 45
 dielektrische Verschiebungsdichte, 114
 dualer Komplex, 10

 ebene Welle, 119
 elektrische Feldkonstante, 116
 elektrische Feldstärke, 114
 elektrisches Feld, 111
 elliptische Regularität, 26, 46
 elliptischer Operator, 24
 exakte Sequenz, 15, 87f

 formaladjungierter Operator, 27, 56

 glatter Pullback, 19

 harmonische Form, 12, 46

 kompakte Verdopplung, 39, 89
 kriechende Strömung, 123
 kurze Sequenz, 15

lange Sequenz, 15

magnetische Feldkonstante, 116

magnetische Induktion, 114

maximale abgeschlossene Fort-
setzung, 27, 31, 45

minimale abgeschlossene Fort-
setzung, 27, 31, 45

quasiisometrisch, 33

schwache Operatortopologie,
37

starke Operatortopologie, 37

stationäre Strömung, 123

transponierter Operator, 27,
56

